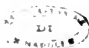
WOEPCKE

PASSAGES RELATIFS

A DES SOMMATIONS

DE SÉRIES DE CUBES





PASSAGES RELATIFS

A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES

EXTRAITS

DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS

DU *BRITISH MUSEUM* DE LONDRES

COTÉS N.os CCCCXVII ET CCCCXIX DES MANUSCRITS ORIENTAUX
(N.os 7469 et 7470 DES MANUSCRITS ADDITIONNELS)





PASSAGES RELATIFS
A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES

EXTRAITS

DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS

DU *BRITISH MUSEUM* DE LONDRES

COTÉS N.os CCCCXVII ET CCCCXIX DES MANUSCRITS ORIENTAUX
(N.os 7469 et 7470 DES MANUSCRITS ADDITIONNELS)

PAR M. F. WOEPCKE

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ORIENTALE ALLEMANDE
ET DU CONSEIL DE LA *Société Asiatique* DE PARIS,
ET MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES *Nuovi Lincei*.



ROME

IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
Via Lata N.° 211 A.
1864

Manuscrit coté CCCCXVII des manuscrits orientaux du British Museum (7469 des manuscrits additionnels).

Volume in-4°. de 210 feuillets en papier. Le premier et le dernier de ces 210 feuillets, qui sont des feuillets de garde, et les trois feuillets qui précédent le dernier feuillet de garde ne sont pas numérotés. Les 203 autres feuillets sont numérotés au crayon avec les numéros 1 à 204, à l'exception du 30.e feuillet du volume, qui paraît avoir été sauté par inadvertance.

Les quatre feuillets qui précédent le dernier feuillet de garde sont en blanc, ou occupés par des notes détachées.

Tout le reste du Manuscrit est occupé par le commentaire de Chihâb Eddîn Aboûl Abbâs Ahmed Ben Radjab, connu sous le nom d' Ibn Almadjdî, le châfêïte, sur le *Talkhîs* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ. La copie est datée du 17 Rabîa' second de l'an 840 de l'hégire, ou 29 octobre 1436 de J.-C., et l'achèvement du commentaire du 6 Dzoûl-hidjdjah de l'an 834 de l'hégire, ou 15 août 1431 de J.-C.)

Le commentateur Ahmed Ibn Almadjdî mourut en 850 de l'hégire (29 mars 1446 à 18 mars 1477 de J.-C.), et est mentionné dans le Dictionnaire bibliographique de Hadji Khalfa comme auteur de plusieurs ouvrages concernant l'astronomie et le calcul astronomique. Voir l'édition de Fluegel, Tom. I., pag. 248, N°. 475; Tom. II, pag. 581, N° 3990; Tom. III, pag. 233, N.° 5111 et pag. 528, N°. 6778; Tom. V, pag. 205, N°. 10694. Comparer Woepcke, sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident, pag. 66, lig. 22 et suiv.; et Bibl. Bodleianae codd. mss. orientall. catalogi partis secundae vol. I, confecit A. Nicoll, Oxonii, 1821, in-folio, pag. 284, N°. CCLXXXVI, 1°

Les Numéros des feuillets marqués en marge des pages 1 à 20 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon et mentionnée ci-dessus.)

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. O Dieu bénis notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons, et repands sur eux ton salut. f. 1 v.

Le pauvre qui a besoin de la miséricorde de son Seigneur, qui confesse son insuffisance dans l'accomplissement de ses devoirs et ses péchés, qui espère le pardon de Dieu qui resuscite et qui crée, Ahmed le châfêïte Ibn Almadjdî dit :

Louange à Dieu qui a reuni (1) les savants dans les habitations (2) de la dignité seigneuriale, et qui a fait tomber (3) sur eux, dans la distribution (4) des qualités excellentes (5), le lot (6) de la bonne fortune; qui a soulevé (7) de leurs

---

(1) Cette préface, écrite en prose rimée, est remplie de jeux de mots dans le goût arabe, l'auteur ayant eu soin d'employer des mots qui ont en même temps des significations techniques dans l'arithmétique pratique ou dans d'autres parties des sciences mathématiques. Ainsi le mot traduit ici par « réunir » signifie en même temps, comme terme technique « additionner ».

(2) Ce mot signifie en même temps les « places » ou « rangs » de chiffres dans la numération, et en astronomie les « mansions » de la lune.

(3) Le mot traduit ici par « faire tomber » signifie aussi « multiplier ».

(4) Ce mot signifie en même temps « division ».

(5) Le mot traduit par « qualités excellentes » signifie en même temps « excès », et de là « différence ».

(6) Ce mot signifie en même temps « flèche » et « sinus verse », et en outre dans les calculs relatifs à des sociétés de commerçants etc. « portions ».

(7) Le mot qui signifie « soulever » est souvent aussi employé en arithmétique pratique pour désigner le « montant » qui « résulte » d'une opération.

cœurs le rideau (1), et qui les a comblés de bienfaits innombrables (2); qui leur a fait connaître les essences des noms (3) et les qualités inhérentes et séparables (4), de sorte qu'ils ont découvert les choses inconnues (5), et qu'ils ont appris la signification des mots.

Je loue Dieu parce qu'il a revêtu (6) les savants des robes d'honneur de la perfection, et les a ornés des colliers (7) de la gloire. Je le remercie de les avoir préservés des deux (espèces d') erreurs (8) dans l'action d'effacer (9) et dans l'action d'écrire, de sorte que les plateaux (10) de leurs balances (11) ont penché en leur faveur.

Je témoigne qu'il n'y a pas d'autre Dieu que Dieu seul, et qu'il n'a point de compagnon, Lui qui est un, unique, simple (12), éternel, inaccessible au nombre, qui n'a point d'épouse (13) ni de fils.

Je témoigne que notre seigneur Mohammed est son serviteur et son prophète, son élu et son ami, l'imâm des imâms auquel Dieu a inspiré les paroles de la sagesse, le possesseur de la noble origine (14) et de la destinée (15) élevée et sublime, de la place (16) qui est l'objet des louanges, et du réservoir (17) du nectar céleste célébré par toutes les langues; qui est initié au vaste ensemble et aux détails (18) de la science, et qui juge avec pénétration de l'excellence des offrandes (19), de sorte qu'il confère les grâces, petites et grandes; qui a été transporté dans l'apogée de la noblesse aux cercles du plus haut des paradis célestes; dans la main duquel les pierres muettes (20) ont loué Dieu, et qui est l'être pur chargé

---

(1) « Le soulèvement du rideau » est en même temps le titre d'un célèbre traité d'Ibn Albannâ sur l'arithmétique pratique.

(2) Textuellement : ce qui n'est pas dans le « calcul ».

(3) Ces mots contiennent une allusion évidente aux termes techniques qui désignent les quantités irrationnelles appelées « de deux noms » et « de plusieurs noms ».

(4) Allusion à la quantité « continue » et « discrète ».

(5) Allusion à la détermination des valeurs des inconnues en algèbre.

(6) Le verbe traduit par « revêtir », textuellement « jeter sur », est, sans la préposition « sur », le terme technique qui désigne la « soustraction ».

(7) Ce mot signifie aussi les « nœuds » des nombres, c'est à dire les neuf unités, les neuf dizaines (10, 20, 30, etc.), les neuf centaines, et ainsi de suite.

(8) Allusion au « calcul des deux erreurs », c'est à dire à la règle des deux fausses positions.

(9) Allusion à une certaine manière de calculer sur le sable dans laquelle on efface successivement avec le doigt les chiffres que l'on vient d'écrire, pour les remplacer par d'autres, jusqu'à ce qu'on arrive au résultat.

(10) Allusion à un autre nom de la regle des deux fausses positions.

(11) Le mot qui signifie « balance » est aussi le terme technique employé pour désigner la « preuve », par exemple la preuve par neuf, par sept, etc.

(12) Ce mot signifie en même temps « impair ».

(13) Ce mot signifie en même temps « pair ».

(14) Le mot traduit par « origine » signifie, comme terme technique, le « rapport » de deux quantités.

(15) Ce mot signifie en même temps la « division ».

(16) Ce mot signifie en même temps le « dénominateur » d'une fraction.

(17) Ce mot désigne en même temps une certaine partie de la constellation de la Grande Ourse.

(18) Textuellement ; au « beaucoup » et au « peu ».

(19) Dans cette phrase le texte du manuscrit paraît être altéré. Le mot traduit par « offrandes » sert à désigner en arithmétique des calculs « d'approximation » et en général des « procédés expéditifs ».

(20) Le mot traduit par « muettes » désigne en même temps les quantités « irrationnelles », et, parmi les nombres entiers, les nombres « premiers », eu égard à leur propriété de ne pas se laisser décomposer en facteurs. Comparer le *Liber Abbaci* de Léonard de Pise, édition du *Prince Don Balthasar Boncompagni*,

de la défense de la foi. Puisse Dieu répandre sur lui, sur sa famille et sur ses compagnons toutes les bénédictions possibles, le salut, la noblesse, l'honneur et la grandeur.

Pour en venir au fait. Attendu qu'aucun blâme (1) ne s'attache à la science du calcul, et qu'elle n'est resserrée par aucune barrière (2), j'ai choisi, dans cette science, comme objet d'une étude particulière, l'ouvrage intitulé « l'Exposé fait » avec choix » (*Talkhîs*), ouvrage complet en fait de théorie, composé par le chaïkh, l'imâm, Aboûl Abbâs Ahmed Ibn Albannâ, puisse Dieu couvrir ses péchés de sa miséricorde et le faire demeurer au milieu de son paradis. Cependant j'ai remarqué que cet ouvrage contient des opérations privées de leur partie la plus instructive, en tant qu'elles ne sont pas accompagnées, dans les chapitres qui en traitent, d'un (exemple ou d'un problème) correspondant; et qu'il contient des théories subtiles dont il est impossible d'exposer d'une manière satisfaisante les significations, quand même on y apporterait un soin extrême dans quelques feuillets d'un mince volume, quoique certainement remplis d'une science abondante, si ce n'est que l'auteur n'y a point entrepris l'explication de ces belles opérations. Au contraire, il les a laissées destituées de démonstrations, de sorte que nous ne savons pas si la justesse de ce que l'auteur avance est nécessaire ou accidentelle, et si, en nous conformant à ce qu'il expose, nous pouvons arriver à ce que nous désirons savoir en dehors de cela.

Par conséquent j'ai jugé convenable d'écrire sur cet ouvrage un commentaire qui contînt l'explication des principes sur lequels il est fondé, l'exposé clair et exact de ses parties compliquées, et qui écartât l'obscurité qui cache (3) les objets qu'il a en vue; de réunir, au moyen de ce commentaire, ce qui se trouve dispersé dans l'ouvrage original, et de rassembler les joyaux précieux qu'il renferme; d'éclaircir enfin les méthodes de ses opérations et les démonstrations de ses problèmes.

J'ai donc essayé (4) mes forces en consignant dans cet ouvrage ce qui est dans les limites du possible, et c'est à l'épreuve (5) que l'on reconnait la valeur du caillou ou qu'on le juge méprisable; j'ai dirigé (6) vers cet objet le cœur (7)

Rome 1857, in-4.°, pag. 31, le tableau placé sur la marge de la page. Le mot « hasam » y est la reproduction, un peu modifiée, du mot arabe qui signifie « muet ».

(1) Littéralement : « poussière ». Ce mot contient en même temps une allusion au calcul du *gobâr*, ou calcul de poussière.

(2) Le mot arabe traduit par « barrière » est *hiçâr* et paraît contenir une allusion à un célèbre traité d'arithmétique, antérieur à Ibn Albannâ et intitulé « *Al-hiçârou 'l-çaghîr* ».

(3) Littéralement: (qui contînt) « l'action d'écarter le manteau », *qachfou 'l kinâ*'. Ces mots renferment peut-être une allusion à un traité du célèbre Nacîr Eddîn Althôuci, intitulé *Qachfou 'l-kinâ* et relatif à un sujet appartenant à la trigonométrie sphérique. Voir Hadji Khalfa, édition de Fluegel, Tom. V, pag. 212 et 213, N.° 10738. Comparer *ibidem* N.° 10742.

(4) Ce mot est employé quelquefois comme expression technique pour désigner l'action de « faire la preuve » d'une opération arithmétique.

(5) Ce mot sert en même temps comme terme technique pour désigner la « vérification » d'une opération arithmétique.

(6) Le mot traduit par « diriger » sert, comme terme technique, à désigner l'action de « transformer » une fraction donnée dans une autre dont le dénominateur est donné.

(7) Le mot traduit par « cœur » se change, par une légère modification des points-voyelles, dans le terme technique qui signifie « zéro ».

de ma pensée en lui donnant du développement (1), et j'y ai mis ma confiance dans le changement (2).

Dieu a eu égard à ma contrition (3); il m'a recompensé en me réconfortant (4), et il m'a aidé à composer, à écrire, et à rédiger cet ouvrage.

J'ai intitulé cet ouvrage « Le recueil de la moelle et le commentaire de l'exposé des opérations du calcul. »

Dans sa rédaction je me suis fait une loi de commencer (constamment) par mentionner littéralement les paroles de l'auteur, telles qu'il les a consignées dans sa composition. Ensuite je les ai fait suivre d'une explication au moyen d'exemples, et enfin j'ai placé en dernier lieu la démonstration et l'indication des causes, afin que (chaque théorie) soit complète et absolue dans son chapitre et présentée d'une manière claire et spéciale en faveur de ceux qui désirent s'en instruire. J'ai indiqué les paroles de l'auteur au moyen des mots « l'auteur dit telle chose » et au moyen de l'encre rouge, de manière à les distinguer du commentaire et de les mettre à part. Quelque fois aussi j'ai cité des passages de ce que l'auteur a exposé dans (l'ouvrage intitulé) « Le soulèvement du rideau. » Dans ces cas je dirai « il a dit », de sorte qu'il n'y a lieu à aucune ambiguité.

fin de f. 1 r. Cependant je n'ai pas violé la virginité de sa méthode | et je ne me suis pas frauduleusement approprié les choses admirables qui lui appartiennent (5), comme on abuse d'un homme simple, mais j'ai étudié ce que les anciens ont mentionné en fait des principes de cette branche de la science, et ce qu'ils ont expliqué.

. . . . : Il est connu que si l'on ajoute un nombre quelconque au nombre qui le suit, le résultat est le double du premier nombre plus un.
f. 17 v. Il est connu aussi que l'unité est égale à trois fois un tiers | et que le double d'un nombre quelconque est égal à trois fois deux tiers de ce nombre. Par conséquent la somme d'un nombre quelconque et de celui qui le suit est égale à trois fois deux tiers de ce nombre plus un tiers de l'unité (6). Donc, si nous multiplions le double de la somme (7) par le dénominateur des deux nombres, on a multiplié par le triple de ce qu'il fallait. Il est connu aussi, que si l'on

---

(1) Le mot traduit par « développement » signifie en même temps le « numérateur total » que l'on obtient en réduisant un nombre mixte, ou certaines autres espèces compliquées de fractions, en usage chez les Arabes, à une fraction ordinaire.

(2) C'est à dire : au milieu des vicissitudes des choses humaines. Ce mot paraît contenir une allusion à un terme technique formé de la même racine et qui désigne la « transformation » des équations algébriques.

(3) Ce mot signifie, comme terme technique, « fraction ».

(4) Les deux mots traduits par « récompenser » et « réconforter » désignent en même temps les deux opérations algébriques de l'« opposition » et de la « restauration » dont la réunion forme le nom arabe de l'algèbre.

(5) Ces mots signifient en même temps : je n'ai rien dérobé à son hôte.

(6) $a + (a + 1) = 3\left(\frac{2a}{3} + \frac{1}{3}\right)$.

(7) C'est à dire $2[1 + 2 + 3 + \ldots + n]$ ou $n(n + 1)$.

multiplie le double d'un nombre par le triple d'un autre nombre, le résultat est égal à six fois le résultat de la multiplication de l'un des deux nombres par l'autre.

L'auteur dit: *et l'élévation au cube (se fait) par l'élévation au carré de la somme* (1). C'est à dire que la somme des cubes des nombres suivant leur ordre résulte de la multiplication de la somme des côtes par elle-même. f. 17 v. lig. 3.

La raison de cela, c'est que, si un nombre quelconque est partagé en deux parties, la somme du produit de la multiplication du nombre par l'une de ses deux parties, plus le rectangle des deux parties et le carré de l'autre partie est égale au carré de ce nombre (2).

En effet, le principe de la multiplication d'un nombre par un autre nombre consiste en ce que nous multipliions le tout de l'un des deux nombres par le tout de l'autre. Donc, si l'on divise l'un des deux nombres, ou tous les deux, dans un nombre quelconque de parties, il est nécessaire de multiplier chaque partie de l'un des deux nombres par toutes les parties de l'autre, et d'additionner les résultats. C'est par là aussi que l'on reconnait la raison de la multiplication suivant les rangs (des chiffres des nombres), parce que chacun des deux nombres multipliés l'un par l'autre peut être décomposé dans ses rangs (3), ainsi que vous le lirez certainement, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le chapitre de la multiplication.

Cela étant établi, nous disons que, si un nombre quelconque est divisé en deux parties de quelque manière que ce soit, son carré est égal aux deux carrés de ses deux parties et à leur rectangle pris deux fois.

Soit donc le nombre A divisé en deux parties d'une manière quelconque, et que ce soient B, C. Je dis que le carré de A est égal à la somme des deux carrés de B et C et de leur rectangle pris deux fois.

En effet, A étant divisé en B et C il faut que nous multipliions chacune de ces deux parties par chacune des deux parties de A. Donc posez-les deux fois sur deux rangs, comme il suit:

B C
B C

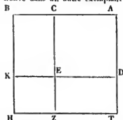
---

(1) C'est à dire $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + n]^2$.

(2) $(a + b)a + ab + b^2 = (a + b)^2$.

On trouve ici sur la marge du ms. une glose évidemment destinée à remplacer l'alinéa suivant, et dont voici la traduction.

J'ai trouvé dans un autre exemplaire, portant l'écriture de l'auteur, une autre explication à savoir la suivante. *Exemple.* Soit le nombre AB divisé en deux parties au point C, et soit la surface AH le carré de AB. Menons du point C une droite parallèlement à AT, ce sera la droite CZ, et prenons sur AT un segment équivalent à AC, à savoir AD ; enfin menons la droite DE parallèlement à AB. Alors, puisque la surface AK résulte de la multiplication de AB par AD, c'est à dire par AC; puisque la surface DZ résulte de la multiplication de DE, c'est à dire de AC, par EZ, c'est à dire par EK, c'est à dire par CB; et puisque la surface EH résulte de la multiplication de EZ par lui-même, c'est à dire de BC par lui-même; il s'en suit ce que nous nous étions proposé de démontrer. Cela étant établi, nous disons.



(3) Par exemple $3856 = 3000 + 800 + 50 + 6$.

Nous multiplions B par B, et ensuite par C; puis C par B, et ensuite par C, et nous additionnons les quatre résultats. Mais le produit de B par B est le carré de B; et pareillement C fois C est le carré de C; et le produit de B fois C et de C fois B est le rectangle B fois B pris deux fois. Par conséquent le carré de A est égal à la somme des carrés de ses deux parties et de leur rectangle pris deux fois.

Il est, par là, évident que le produit de A tout entier par B est égal au carré de B plus le rectangle de B fois C, et que le produit de A tout entier par C est égal au carré de C plus le rectangle de C fois B.

Donc, si l'on multiplie un nombre par l'une de ses deux parties, et que l'on joint au résultat le carré de la partie qui n'a pas servi à la multiplication, et le rectangle des deux parties, cela est égal au carré du nombre.

Cela étant établi, nous disons qu'il est connu que le cube d'un nombre est le résultat de la multiplication du nombre par son carré. Donc étant donnés des nombres suivant leur ordre et dont le premier soit l'unité, si nous désirons trouver la somme de leurs cubes, vous multiplierez chacun de ces nombres par son carré et vous additionnerez les résultats. Il résultera la quantité cherchée (1).

Mais le carré d'un nombre quelconque est la somme de son triangle et du triangle du nombre précédent (2), ainsi que nous expliquerons cela certainement ci-après. Et le triangle d'un nombre quelconque est égal à la somme de ce nombre plus le triangle du nombre précédent (3); ainsi qu'il sera pareillement expliqué.

D'après cela, si nous désirons trouver la somme des cubes des nombres suivant leur ordre, et dont le premier soit, par exemple, l'unité, vous multiplierez chacun de ces nombres par son triangle du nombre précédent et vous additionnerez les résultats. Il résultera la quantité cherchée (4).

Soient, par exemple, quatre nombres, dont le premier soit l'unité et le dernier quatre. Nous désirons trouver la somme de leurs cubes. Nous les posons donc dans une ligne, comme ci-après, et au dessous leurs triangles dans une autre ligne, comme vous le voyez:

1	2	3	4
1	3	6	10

Il faut alors que nous multipliions le quatre par le dix que se trouve au-dessous, et par le six qui est au-dessous du nombre précédent. Puis vous multipliez le trois

(1) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = 1.\,1^2 + 2.\,2^2 + 3.\,3^2 + 4.\,4^2 + \ldots + (n-1).\,(n-1)^2 + n.\,n^2.$$

(2) $$n^2 = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

(3) $$\frac{n(n+1)}{2} = n + \frac{(n-1)n}{2}.$$

(4) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = 1.\,(0+1) + 2.\,(1+3) + 3\,(3+6) + 4(6+10) + \ldots + (n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}\right] + n\left[\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right].$$

par le six, et ensuite par le trois; et pareillement le deux par le trois et ensuite par le un. Puis le un par le un. Vous additionnerez les résultats et il résultera la somme des cubes de ces nombres.

Mais le résultat de l'addition de ces produits est précisement égal au résultat de la multiplication du triangle du plus grand de ces nombres par lui-même, c'est à dire de la somme de ces nombres par elle même (1).

La raison de cela c'est que le triangle du plus grand de ces nombres, à savoir dix, se partage en deux parties, quatre et six, c'est à dire son côté et le triangle précédent. Donc, si vous multipliez le dix | par le quatre et le quatre f. 13 r.
par le six cela revient à former le produit d'un nombre par une de ses deux parties et le rectangle des deux parties. Si donc on ajoute à cela le carré de l'autre partie, il résulte le carré de ce nombre. Mais l'autre partie, c'est six. Et il a été déja démontré que le carré du six est égal au produit du six par l'une de ses deux parties plus le rectangle de ses deux parties et plus l'autre partie, c'est à dire égal au produit du six par le côté trois, plus le produit du côté trois par le triangle trois qui est le triangle précédent, et en joignant cela encore au carré de l'autre partie, à savoir de trois, parce que le six a été divisé en trois et trois. Mais le carré du trois est égal au produit du trois par le côté deux qui est l'une de ses deux parties, plus le rectangle des deux parties, c'est à dire du côté deux multiplié par le triangle un, et plus le carré de l'un. Mais le carré de l'un c'est un.

Il est donc rendu évident, par là, que si l'on multiplie chacun de ces nombres par son triangle et par le triangle du nombre précédent, la somme des résultats est égale au produit de la somme de ces nombres par elle-même et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer (2).

(1) $$1.(0+1)+2.(1+3)+3.(3+6)+4.(6+10)+\ldots+$$
$$+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right\}+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=[1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n]^2.$$

(2) Cette démonstration d'Ibn Almadjdî s'exprime de la manière suivante en language algébrique moderne:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=1.1^2+2.2^2+3.3^2+4.4^2+\ldots+(n-1)(n-2)^2+n.n^2=$$
$$=1.(0+1)+2.(1+3)+3(3+6)+4(6+10)+\ldots+$$
$$+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right\}+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}=$$
$$=1^2+2(1+[2+1])+3(3+[3+3])+4(6+[4+6])+\ldots+$$
$$+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]\right\}+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\left[n+\frac{(n-1)n}{2}\right]\right\}$$

Mais on a

$$1^2+2(1+[2+1])=1^2+2.1+2.[2+1]=(2+1)^2=3^2,$$
$$3^2+3(3+[3+3])=3^2+3.3+3.[3+3]=(3+3)^2=6^2,$$
$$6^2+4(6+[4+6])=6^2+4.6+4.[4+6]=(4+6)^2=10^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.*

Il a été dit précédemment, parmi les proprietés des nombres (naturels) rangés suivant leur ordre, que les unités du plus grand, c'est à dire de celui jusqu' auquel (la suite) s'étend, sont égales au nombre (des termes de la suite). Or, il en serait de même pour le plus grand des nombres impairs rangés suivant leur ordre, si les nombres pairs étaient intercalés parmi les impairs. Il est connu aussi que le nombre des nombres pairs qui tombent entre ces nombres impairs, est plus petit d'une unité que le nombre des impairs; et si de deux nombres quelconques l'un dépasse l'autre d'une unité, leur somme est le double du plus grand moins l'unité, ou le double du plus petit plus l'unité. D'après cela le (nombre) jusqu'auquel (la suite) des impairs s'étend, est le double du nombre de ces impairs moins l'unité.

Il a été déjà montré, dans la détermination de la somme de la proportion arithmétique, qu'il fallait additionner les deux termes extrêmes et multiplier cela par la moitié du nombre (des termes). Mais (le terme) le plus petit est (ici) l'unité. Lors donc qu'il est ajouté au plus grand, il résulte le double du nombre des nombres. Et il faut que nous multipliions par la moitié du nombre des nombres impairs, c'est à dire par un quart de la somme des deux termes extrêmes. Nous multiplierons donc la somme des deux termes extrêmes par son quart. Mais le produit d'un nombre par son quart est égal au produit de sa moitié par sa moitié, ainsi que nous expliquerons cela certainement.

L'auteur dit: *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.*

Il faut faire précéder ce problème de deux principes.

L'un deux c'est qu'il faut que vous sachiez que la somme des nombres suivant leur ordre depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusq'auquel (la suite) s'étend, s'appelle le triangle de ce nombre.

$$\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2 + (n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2} + \left[(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]\right\} =$$

$$= \left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2 + (n-1) \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-1) \cdot \left[(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right] =$$

$$= \left[(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2.$$

$$\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 + n\left\{\frac{(n-1)n}{2} + \left[n + \frac{(n-1)n}{2}\right]\right\} = \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 + n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n \cdot \left[n + \frac{(n-1)n}{2}\right] =$$

$$= \left[n + \frac{(n-1)n}{2}\right]^2 + \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Donc

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = [1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n]^2.$$

Soient pris, par exemple, les nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusq'au six, et soient (écrits) au-dessous leurs triangles depuis un jusq'à vingt et un, et leurs carrés depuis un jusqu'à trente six, ainsi que le montre la figure suivante

1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	9	16	25	36

Il a eté déjà expliqué, dans ce qui précède, que le carré d'un nombre quelconque est égal à son triangle plus le triangle du nombre précédent.

En vertu de cela (1) on peut dire que les triangles des nombres pris suivant leur ordre jusqu'à un nombre impair sont égaux aux carrés des nombres impairs suivant l'ordre pris jusqu'au même uombre impair; et que les triangles des nombres suivant l'ordre pris jusqu'à un nombre pair, sont égaux aux carrés des nombres pairs suivant l'ordre pris jusqu'au même nombre pair. Et certainement l'explication de la signification du triangle se présentera lorsqu'il sera question des nombres figurés, si Dieu le Très-Haut le permet.

Le second (principe) c' est que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de leur produit lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une quantité quelconque tandis que l'autre a été diminué proportionnellement.

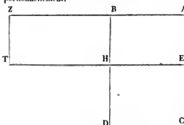
Pour effectuer l'objet que ce principe a en vue il y a deux méthodes. L'une consiste à diviser l'un des deux facteurs par un certain nombre, et à multiplier l'autre facteur par ce même nombre (2).

---

(1) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction.

Dans un autre exemplaire (on lit :) En vertu de cela la somme des carrés des nombres impairs suivant leur ordre ou des nombres pairs suivant leur ordre est la somme des triangles des nombres suivant leur ordre pris jusqu'à ce nombre déterminé; car le carré de l'unité est égal à son triangle, parce qu'il n'est précédé de rien ; et le carré du trois est égal à son triangle plus le triangle du nombre pair précédent ; et pareillement le carré de deux est égal à son triangle plus le triangle du nombre impair précédent. Et ainsi de suite d'après le même ordre. Et certainement la signification du trianglo sera expliquée lorsqu' il sera question des nombres figurés, si Dieu le Très-Haut le permet.

Le second (principe) c'est que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de leur produit, lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une quantité quelconque, tandis que l'autre a été diminué proportionnellement.



Exemple. Soit le rectangle AD formé par le produit de AB fois AC, et soit ensuite AC divisé au point E. Que l'on prolonge AB de BZ; et soit CE à EA comme BZ à AB, c'est à dire la partie retranchée à ce qui reste come la partie ajoutée à la ligne à laquelle elle est ajoutée ; enfin complétons le rectangle AT. Je dis que les deux rectangles AD, AT sont égaux. La raison de cela c'est que CE est à EA, c'est à dire DH à HB, comme BZ à AB, c' est à dire comme HT à HE. Or, le rectangle ED est formé du produit du premier par le quatrième (terme), qui sont DH, HE ; et le rectangle BT est formé du produit du second par le troisième (terme) qui sont HB, HT. Par conséquent les deux rectangles ED, BT sont égaux, d'après ce qui a été dit précédemment. Ensuite ajoutons le rectangle AH comme partie commune à chacun des deux rectangles. Alors les deux rectangles AD, AT seront égaux. Et c' est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

(2) $a \cdot b = \left(\frac{a}{m}\right) \cdot (b \cdot m).$

L'autre méthode consiste à retrancher de l'un des deux facteurs une quantité arbitraire, à prendre le rapport de la partie retranchée à la partie restante et à ajouter à l'autre facteur une quantité proportionnelle à ce rapport (1).

Exemple soit l'un des deux facteurs six et l'autre huit. Ce qui résulte de la multiplication de l'un par l'autre est quarante huit. Or, si vous divisez le six, par exemple par deux, il résulte trois; et si vous multipliez le huit par
f. 18 v. le deux, il résulte seize. Alors ce qui résulte | de (la multiplication) de trois par seize est quarante huit.

Et si vous retranchez du six par exemple trois, le rapport de cela au reste, à savoir à trois, est celui de l'égalité; ajoutant par conséquent au huit son équivalent il résulte seize. Alors le résultat de la multiplication de trois par seize est quarante huit, comme d'abord.

Et si vous retranchez du six deux, le rapport de cela au reste, à savoir au quatre, est la moitié; ajoutant donc au huit l'équivalent de sa moitié, il résulte douze. Alors le résultat de la multiplication de quatre par douze est pareillement quarante huit.

La cause de cela etc.

. . . . . Mais il a été déjà expliqué, dans le second principe, que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de (la multiplication de) ces deux nombres lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une certaine quantité, tandis qu'elle a été retranchée de l'autre proportionnellement, non suivant sa grandeur absolue. Par conséquent un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend étant les deux côtés d'un rectangle, si l'on augmente le premier de deux fois sa propre valeur, de sorte que l'on obtient le troisième (nombre) |
f. 19 r. à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, exactement, et si l'on diminue l'autre suivant la même proportion, de sorte qu'il est reduit à un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, parce que le tiers est au tout comme le sixième à la moitié; alors on est ramené à trois côtés dont l'un est le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, l'autre le second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et le dernier un sixième du (nombre) jusqu'auquel la suite s'étend. On multiplie donc le premier par le second, et ce qui résulte par le troisième.

f. 19 v. lig. 3 L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double moins un* (2). L'explication de ce problème est conforme à l'explication de l'addition des cubes des nombres pairs suivant leur ordre. Nous la différerons donc jusque là; et par là sera expliqué ce qui vient
f. 19 v. lig. 5. d'être mentionné.

---

(1) Si l'on fait $\frac{m}{a-m} = \frac{n}{b}$, on aura $a \cdot b = (a-m)(b+n)$.

(2) C'est à dire $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (24-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s' étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.*

Attendu que le nombre des nombres (naturels) suivant l'ordre est égal au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, mais que, entre les nombres pairs pris suivant l'ordre, manquent les impairs pris suivant l' ordre, dont le nombre est égal au nombre des pairs, parce que le premier des pairs est deux qui est précédé par l'unité; il s'ensuit que, dans les nombres pairs, le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est égal au double du nombre (des nombres). L'addition des deux termes extrêmes consiste donc à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux, parce que c'est le premier des pairs. Par conséquent on multiplie deux plus le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre des pairs, c'est à dire par un quart du double de ce nombre, ou par un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s' étend. Mais le produit des deux termes extrêmes par un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est égal au produit de la moitié de la somme des deux termes extrêmes par la moitié du (nombre) jusqu' auquel (la suite) s'étend, en vertu de ce qui a été expliqué dans le second principe. Dieu seul connait la vérité.

L' auteur dit : *Et l' élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu' auquel (la suite) s' étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples); ou par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.*

L'auteur mentionne ici deux méthodes pour trouver (la somme) des carrés des nombres pairs. La seconde est celle qui a été donnée déjà précédemment pour trouver (la somme) des carrés des nombres impairs. En effet, il a été expliqué, à l'occasion du premier principe, que les carrés des nombres impairs ou des nombres pairs (additionnés) suivant leur ordre sont égaux aux triangles des nombres (naturels additionnés) suivant leur ordre jusqu'au même nombre impair ou (jusqu'au même nombre) pair ; et que, si ces triangles sont divisés par la somme de leurs côtés, il résulte des (quotients) qui se dépassent mutuellement d'un tiers (1). L'opération revient donc à ceci, que la quantité cherchée soit décomposée en trois côtés, à savoir la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s' étend, le second (nombre) à partir de ce (nombre) et un tiers du troisième (nombre) à partir de ce (même nombre), ainsi que tout cela a été expliqué à

(1) C'est à dire

$$\frac{1+3+6+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}{1+2+3+\ldots+(n-1)+n}-\frac{1+3+6+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}}{1+2+3+\ldots+(n-1)}=\frac{1}{3}.$$

l'occasion des carrés des nombres impairs. Il n'y a, à cet égard, aucune différence entre la sommation des impairs et des pairs. Enfin le produit de la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend par un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu' auquel (la suite) s' étend, est égal au produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, tout entier, par un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'etend. Or cela, c'est exactement la méthode pour l'addition des carrés des nombres impairs.

Quant à la première méthode, elle consiste à multiplier un tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité par la somme, c'est à dire par la somme des nombres pairs pris suivant l'ordre. Il a été déjà expliqué, dans ce qui précède, que, si on multiplie les uns par les autres les trois côtés, a savoir la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, le second (nombre) à partir de ce (nombre) et un tiers du troisième (nombre) à partir de ce (même nombre), il résulte la quantité cherchée ainsi qu'il a été dit. Mais le produit du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, est égal au produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu' auquel (la suite) s' étend, tout entier, par un tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, en vertu de ce que vous savez. Si ensuite ce qui résulte (est multiplié) par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, il résulte la même chose que d'abord. Mais si vous multipliez le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, alors il faudra multiplier le résultat par un quart du nombre (1). (Le produit qu'il s'agit de former) est donc décomposé dans le produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, fois deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui résulte (devant être multiplié) par un quart du nombre. Mais un quart du nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre est égal à la moitié du nombre des nombres pairs suivant leur ordre; car il manque au nombre (des nombres naturels) des nombres impairs en quantité égale à ces nombres pairs, ainsi qu'il a été dit. La quantité cherchée est donc un rectangle (2) (formé) de trois côtés dont l'un est le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, l'autre deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et le dernier la moitié du nombre des nombres pairs pris suivant l' ordre. Or, par quelque de ces (trois
f. 20 r. côtés) | que vous commenciez, c'est permis. Multipliez donc, par exemple le troisième (nombre) à partir de celui jusqu' auquel (la suite) s' étend par la moitié du nombre des nombres pairs ; et que ce qui résulte soit multiplié par deux

(1) $$(2n+2).\frac{2n+1}{3}.\frac{2n}{2} = (2n+2).\frac{2}{3}(2n+1).\frac{2n}{4}.$$

(2) *Sic*. On se serait attendu à ce que l'auteur dît : « un solide ».

tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu' auquel (la suite) s' étend (1). Mais le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend dépasse celui jusqu'auquel (la suite) s'étend constamment de deux. Lors donc que nous multiplions ce nombre par la moitié du nombre (des nombres pairs), c'est comme si nous avions additionné les deux termes extrêmes et que nous eussions multiplié la somme par la moitié du nombre (des nombres pairs). Mais il a été déjà expliqué que le résultat de la multiplication de la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre (des nombres) est la somme de ces nombres. D' après cela le résultat de la multiplication du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par la moitié du nombre (des nombres) sera la somme des nombres pairs suivant l'ordre. On est donc ramené à la multiplication de cette somme par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu' auquel (la suite) s' étend (2). Mais deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu' auquel (la suite) s'étend sont deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité, attendu que les nombres (naturels) suivant leur ordre se dépassent mutuellement d' une unité, et que, par conséquent, leurs parties se dépassent mutuellement des parties (correspondantes) de l' (unité) ; ce qui est évident. L' opération revient donc à la multiplication de deux tiers du nombre jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité par la somme (des nombres pairs simples) (3), ainsi qu'il a été mentionné. Dieu seul connaît la vérité.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double* (4). f. 20 r. lig. 9.

Pour la démonstration de ce (théorème) établissons préalablement deux propositions.

L' une d' elles c'est que la somme des nombres (naturels), depuis l' unité, suivant leur ordre, est la moitié de la somme des nombres pairs pris à partir du deux suivant leur ordre, et égaux en nombre aux (nombres naturels) (5). Soient, par exemple, quatre nombres (naturels) suivant l'ordre, dont le premier soit l' unité et le dernier quatre; leur somme sera dix. Et soient quatre autres nombres pairs, dont le premier soit deux et le dernier huit; leur somme sera vingt. Or, chacun des nombres pairs étant le double de celui qui lui correspond

---

(1) $(2n+2).\frac{2}{3}(2n+1).\frac{2n}{4}=(2n+2).\frac{n}{2}.\frac{2}{3}(2n+1).$

(2) $(2n+2).\frac{n}{2}.\frac{2}{3}(2n+1)=[2+4+6+\ldots+2n].\frac{2}{3}(2n+1).$

(3) $[2+4+6+\ldots+2n].\frac{2}{3}(2n+1)=\left[\frac{2}{3}(2n)+\frac{2}{3}\right].[2+4+6+\ldots+2n].$

(4) $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2[2+4+6+\ldots+2n]^2.$

(5) $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}[2+4+6+\ldots+2n].$

parmi les nombres (naturels, pris) suivant leur ordre, un des nombres (naturels) est au (nombre pair) correspondant comme la somme des uns à la somme des autres suivant l'ordre. Cela est évident, en vertu de ce qui a été établi précédemment.

La seconde (proposition), c'est que le cube d'un nombre quelconque est égal à huit fois le cube de la moitié de ce même nombre (1).

Exemple. Soit A un nombre donné (2); qu'il soit divisé en deux parties égales, que l'une des deux parties soit B, et qu'il s'agisse d'élever A au carré, c'est à dire de le multiplier par lui-même. Or, par sa division, chacun des deux facteurs a été partagé en deux segments, et tous ces segments sont égaux entre eux et égaux à la quantité B. Par conséquent la multiplication de A tout entier par lui-même est égale à la multiplication de chaque segment de l'un des deux facteurs par les deux segments de l'autre, accompagnée de l'addition des quatre résultats qui sont tous des carrés égaux, et dont chacun est égal au carré de B. Mais ces quatre carrés forment le carré de A; d'où il suit que le carré d'un nombre quelconque est égal à quatre fois le carré de sa moitié. En même temps il est connu que le cube d'un nombre quelconque est ce qui résulte de la multiplication de ce nombre par son carré. Mais la multiplication de A tout entier par son carré tout entier, est égale à la multiplication de chacune de ses deux moitiés par les quatre parties de son carré; et de la multiplication d'une de ses moitiés par les quatre parties de son carré, dont chacune est egale au carré de B, il résulte quatre cubes; de sorte que l'ensemble de ces cubes est égal à huit fois le cube de la moitié de (A), et que chacun de ces cubes est égal au huitième du cube de ce nombre (A). Par conséquent le cube de la moitié d'un nombre quelconque est égale au huitième du cube de ce nombre. C'est ce que nous nous étions proposé d'etablir préalablement.

D'après cela, si nous voulons additionner les cubes des nombres pairs suivant l'ordre, et dont le premier soit deux, et si nous considérons ces nombres pairs comme s'ils étaient des nombres (naturels) suivant l'ordre, et dont le premier soit l'unité, alors la somme des cubes de ces derniers sera un huitième (de la somme) des cubes qu'il s'agit de trouver. Mais il a été expliqué, dans ce qui précède sur la sommation des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre, que, si l'on multiplie la somme de ces nombres par elle-même, il résulte la quantité cherchée. Donc vous multiplierez la somme des nombres (naturels) suivant leur ordre par elle-même et le résultat par huit, afin qu'il résulte la quantité (actuellement) cherchée. Mais le produit d'un nombre par lui-même et

(1) $$a^3 = 8 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

(2) Dans ce qui suit le texte du manuscrit arabe présente un certain nombre d'erreurs, qui proviennent évidemment de ce que le copiste ne comprenait pas bien ce qu'il écrivait. Mais il est trop facile de reconnaître ces méprises et de les corriger, pour qu'il vaille la peine de les signaler et de les relever une à une.

du résultat par huit est égal au produit du même nombre par son double et du résultat par quatre, ou égal au produit du double de ce même nombre par lui-même et du résultat | par deux. En même temps il a été déjà expliqué que f. 20 v. la somme des nombres pairs à partir du deux suivant l'ordre est le double de la somme des nombres (naturels correspondants) à partir de l'unité suivant l'ordre. En outre le produit de la somme des nombres pairs par elle même et du résultat par deux est égal au produit du même nombre par son double. Par conséquent le resultat de la multiplication de la somme des nombres pairs par son double est la somme de leurs cubes, et c'est ce que nous nous etions proposé de démontrer.

Ayant ainsi expliqué la raison de la sommation des cubes des nombres pairs, mentionnons maintenant l'explication de la raison de la sommation des cubes des nombres impairs.

Cela s'expliquera au moyen de ce qui précède, quand nous aurons établi encore deux autres principes, dont l'un est que le produit du plus grand de deux nombres différents quelconques par son double est égal au produit de ce (nombre) par leur somme plus le produit du même par leur différence; et que le produit du plus petit par son double est égal au produit de ce (nombre) par leur somme moins son produit par leur différence (1). Car il est évident que le plus grand des deux nombres est exactement égal au plus petit plus leur différence, et que le plus petit des deux nombres est égal au plus grand moins leur différence. Il suit donc nécessairement que le double du plus grand est égal à leur somme plus leur différence, et que le double du plus petit est égal à leur somme moins leur différence.

Le second (principe) est que, si dans (une suite) de nombres (naturels) quelconques (pris) suivant l'ordre à partir de l'unité, le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, la somme des nombres pairs compris dans (cette suite) dépasse la somme des nombres impairs y compris de la quantité du nombre des impairs; et si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, la somme des nombres pairs est inférieure à la somme des nombres impairs de la quantité des nombres des impairs.

En effet, si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, le nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre se partage en deux nombres égaux dont l'un est le nombre des nombres pairs compris dans (la suite) et l'autre celui des nombres impairs y compris. Mais le premier des nombres pairs, à savoir deux, dépasse le premier des nombres impairs d'une unité; et pareillement le second (nombre pair), à savoir quatre, dépasse le second des nombres impairs d'une unité; et ainsi de suite jusqu'au dernier. La somme des nombres pairs dépasse donc la somme des nombres impairs d'une quantité égale à leur nombre. Si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, le nombre des

(1) $a \,.\, 2a = a\,(a+b) + a\,(a-b)$, $b \,.\, 2b = b\,(a+b) - b\,(a-b)$.

nombres (naturels) suivant leur ordre se partage en deux nombres différents dont l'un, qui est le nombre des nombres impairs, dépasse l'autre d'une unité. Mais le premier des nombres impairs, à savoir l'unité n'est précédé de rien; le second des nombres impairs dépasse le premier des nombres pairs de l'unité; et ainsi de suite jusqu'à ce que le dernier des nombres impairs, à savoir le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, dépasse le dernier des nombres pairs d'une unité. La somme des nombres impairs dépasse donc la somme des nombres pairs d'une quantité égale au nombre des nombres impairs.

Ceci étant établi, nous disons qu'il est évident que, si de la somme des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre, pris à partir de l'unité, on retranche la somme des cubes des nombres pairs y compris, il reste la somme des cubes des nombres impairs y compris. Or, il a été déjà expliqué que la somme des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre résulte de l'élévation au carré de la somme de ces nombres (1). Mais la somme de ces nombres est composée de deux sommes, c'est à dire de la somme des nombres pairs et de la somme des nombres impairs. Par conséquent son carré s'obtient par la mul-

---

(1) Pour faire mieux voir la suite et l'enchaînement des raisonnements qui forment la démonstration d'Ibn Almadjdî, désignons par S_n la somme d'une suite de nombres naturels, par S_i la somme et par ν_i le nombre des nombres impairs compris dans la suite, par S_p la somme des nombres pairs compris dans la suite, de sorte que $S_i + S_p = S_n$; désignons en outre par $S_{c,n}$ la somme des cubes des mêmes nombres naturels, par $S_{c,i}$ la somme des cubes des mêmes nombres impairs, et par $S_{c,p}$ la somme des cubes des mêmes nombres pairs, de sorte que $S_{c,i} + S_{c,p} = S_{c,n}$.

Cela posé, soit premièrement le dernier terme de la suite un nombre pair, de sorte que $S_p > S_i$, l'on aura

$$S_{c,n} = S_n^2 = (S_p + S_i)^2 = S_p(S_p + S_i) + S_i(S_p + S_i),$$
$$S_{c,p} = S_p \,.\, 2S_p = S_p(S_p + S_i) + S_p(S_p - S_i);$$

donc

$$\begin{aligned} S_{c,i} = S_{c,n} - S_{c,p} &= S_i(S_p + S_i) - S_p(S_p - S_i) = \\ &= S_i(S_p + S_i) - S_i(S_p - S_i) - (S_p - S_i)^2 = \\ &= S_i \,.\, 2S_i - (S_p - S_i)^2 = S_i \,.\, 2S_i - \nu_i^2 = S_i \,.\, 2S_i - S_i = \\ &= S_i(2S_i - 1). \end{aligned}$$

Secondement, soit le dernier terme de la suite un nombre pair, de sorte que $S_i > S_p$, l'on aura

$$S_{c,n} = S_n^2 = S_p(S_i + S_p) + S_i(S_i + S_p)$$
$$S_{c,p} = S_p \,.\, 2S_p = S_p(S_i + S_p) - S_p(S_i - S_p)$$
$$\begin{aligned} S_{c,i} &= S_i(S_i + S_p) + S_p(S_i - S_p) = \\ &= S_i \,.\, 2S_i - S_i(S_i - S_p) + S_p(S_i - S_p) = \\ &= S_i \,.\, 2S_i - S_p(S_i - S_p) - (S_i - S_p)^2 + S_p(S_i - S_p) = \\ &= S_i \,.\, 2S_i - (S_i - S_p)^2 = S_i \,.\, 2S_i - S_i = \\ &= S_i(2S_i - 1). \end{aligned}$$

tiplication de chacune des deux sommes par leur somme. Maintenant, si la somme des cubes des nombres pairs résultait de la multiplication de la somme des nombres pairs par la somme des deux sommes, la somme des cubes des nombres impairs résulterait nécessairement de la multiplication de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes. Mais il a été expliqué que la somme des cubes des nombres pairs résulte de la multiplication de la somme des nombres pairs par son double. En outre si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, il est évident que le produit de la somme des nombres pairs, qui est le plus grand des deux nombres, par son double est égal à son produit par la somme des deux sommes plus son produit par leur différence. D'après cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes moins le produit de la somme des nombres pairs, par leur différence. En même temps il a été expliqué que le plus grand de deux nombres se divise dans le plus petit et la différence. Le produit de la différence par le plus grand est donc égal à son produit par le plus petit plus son produit par elle-même, c'est à dire plus son carré. Par suite de cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes moins son produit par leur différence et moins le carré de la différence. Mais il a été expliqué que le produit du plus petit de deux nombres par leur somme moins son produit par leur différence est exactement égal à son produit par son double. D'après cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par son double moins le carré de la différence. Mais il a été déjà expliqué que la différence est égale au nombre des nombres impairs; et il a été expliqué en même temps, dans ce qui précède, que la somme des nombres impairs résulte de l' élévation au carré de leur nombre. | f. 21 r.
Il suit donc nécessairement que le carré de la différence est la somme des nombres impairs. Mais le produit de la somme des nombres impairs par son double, si l' on retranche ensuite du résultat la somme des nombres impairs, est exactement égal au produit de la somme des nombres impairs par son double moins un, attendu que le principe de la multiplication consiste à prendre l'un des deux nombres autant de fois qu'il est contenu d'unités dans l'autre.

Si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, le plus petit des deux nombres est la somme des nombres pairs et le plus grand la somme des nombres impairs, ainsi qu' il a été expliqué; et le produit du plus petit des deux nombres par son double est égal à son produit par la somme des deux nombres moins son produit par leur différence. Par suite de cela la somme des cubes des nombres impairs résulte alors du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes plus le produit de la somme des nombres pairs par leur différence, ce qui est le produit du plus grand des deux nombres par leur somme plus le produit du plus petit par leur différence. Or, il a été déjà expliqué que le produit de plus grand de deux nombres par son dou-

ble est égal à son produit par leur somme plus son produit par leur différence. Mais il a été dejà expliqué, (en outre,) que le produit du plus grand par la différence est égal au produit du plus petit par la différence plus le carré de la différence. D'après cela le produit du plus grand par son double est égal à son produit par leur somme plus le produit du plus petit par la différence et plus le carré de la différence. En même temps il a été expliqué que la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit du plus grand par la somme plus le produit du plus petit par la différence. Il s'ensuit donc nécessairement que le produit de la somme des nombres impairs par son double dépasse la somme de leurs cubes du carré de la différence. Mais il a été expliqué que le carré de la différence est exactement égal à la somme des nombres impairs. Par conséquent il résulte du produit de la somme des nombres impairs par son double diminué constamment de l'unité, la somme de leurs cubes. Et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

f. 21 r. lig. 13 Il a dit (1): Lorsque le commencement se fait à partir (d'un nombre) différent de l'unité, vous déterminerez le nombre des nombres, ainsi qu'il a été exposé précédemment, puis la somme ou (le résultat de) l' addition à partir de l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite à partir de l'unité jusqu'au nombre qui précède le commencement, et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, pour les nombres pairs, la place de l'unité. On opère d'après cette seconde manière dans la sommation des carrés et des cubes se suivant d'après l'ordre à partir (d'un nombre) différent de l'unité. Sachez-le donc.

Attendu que les méthodes produites et mentionnées (dans ce qui précède) pour l' addition des nombres (naturels) suivant leur ordre, et pareillement des nombres impairs et des nombres pairs, sont fondées sur la condition de commencer par l'unité dans les deux premiers cas, et par le deux dans le troisième, ainsi qu'il a été dit dans ce qui précède, elles ne s'appliquent pas aux cas où le commencement se fait à partir (d'un nombre) différent de celui exigé par la dite condition. A cause de cela on opère alors d'après la méthode ordinaire, à savoir celle qui a été déjà expliquée à l' occasion de la neuvième des questions composées, c'est à dire du cas ou l'on ignore le nombre (des termes de la suite) en même temps que la somme. Cette méthode consiste, pour trouver le nombre (des termes), en ce que vous divisez la différence des deux termes extrêmes par la quantité dont (les termes) se dépassent mutuellement, d'où il résultera le nombre (des termes) moins un. Ensuite vous multiplierez la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre (des termes) d'où il résultera la somme. Ou bien (on opère alors) d'après la seconde manière, ainsi qu'il vient d'être dit; parce que, si quelqu'un dit: additionnez les nombres impairs

(1) Ces mots indiquent que ce qui suit est extrait du « Soulèvement du rideau » d'Ibn Albannà, ainsi qu'Ibn Almadjdi en a prévenu le lecteur dans sa preface. Voir ci-dessus, pag. 4, lig. 15 à 17.

suivant leur ordre, par exemple depuis sept jusqu'à quinze, c'est comme s'il avait dit : additionnez les nombres impairs suivant leur ordre depuis l'unité jusqu'à quinze moins la somme des nombres impairs depuis l'unité jusqu'à six. Par là est expliqué aussi le reste des cas, parce que le principe est le même.

On comprend, d'après ce qui précède, que la première manière est plus particulière que la seconde, attendu qu'elle a pour condition l'existence de la proportion arithmétique, de sorte qu'elle ne comprend pas les (cas des) carrés et des cubes.

La phrase de l'auteur : Le deux tient, pour les nombres pairs, la place de l'unité », signifie que, si les nombres pairs (pris) suivant leur ordre, et leurs carrés et leurs cubes, commencent par le deux, on opère d'après la méthode particulière précédemment mentionnée; que, si (la suite ne commence) pas (par le deux), on opère d'après les deux manières qui viennent d'être mentionnées, pourvu que la chose demandée soit seulement d'additionner les nombres pairs (simples); sinon, on emploie, pour leurs carrés et leurs cubes, la seconde manière exclusivement. f. 21 r. lig. 29.

Quant à la manière de trouver les côtés rationnels des cubes, et les côtés d'autres (puissances), et à ce qui s'y rattache, nous mentionnerons cela certainement dans le chapitre des racines, si Dieu, le Très-Haut, le permet.

Il a dit : L'exposé (des propriétés) des carrés est fondé sur (celles) des triangles, et pareillement (la théorie) des pentagones et des autres nombres figurés. Expliquons donc cela, et expliquons la manière de les trouver, ainsi que l'opération (dont on se sert) dans ce (but) et dans leur addition. | Tout cela est f. 21 v
compris dans l'opération mentionnée dans le Traité. Je dis donc que les Arithméticiens placent les nombres suivant leur ordre dans une ligne, et les appellent « côtés », en les assimilant aux lignes; qu'ils considèrent l'unité comme contenant virtuellement toutes les figures, de sorte qu'elle est côté, triangle, carré, et chacune des autres figures virtuellement; qu'ils additionnent l'unité, comme triangle, au deux comme côté, d'où résulte le second triangle, et qu'ils additionnent ensuite celui-ci au trois, comme côté, d'où résulte le troisième triangle, etc.

. . . . . . (1) Puisque donc nous avons obtenu comme résultat ces quantités composées, multiplions le cubo-cube par un. Il en résultera (le cubo-cube) lui-même, et nous le posons dans une première ligne. Ensuite nous multiplions le quadrato-cube par dix, et nous posons le résultat dans une seconde

(1) Pour l'intelligence de ce qui suit je ferai observer qu'il s'agit ici de vérifier l'équation :

$$x^8 + 10x^7 + 648000\ x^3 + 18662400\ x^2 = 461\ x^6 + 5400\ x^5 + 15480\ x^4,$$

et que l'on a

$$x = 16 \qquad x^4 = 65536$$
$$x^2 = 256 \qquad x^5 = 1048576$$
$$x^3 = 4096 \qquad x^6 = 16777216.$$

ligne. Après cela nous multiplions le côté, c'est à dire le seize, par le coefficient des cubes, et nous posons cela dans une troisième ligne. Enfin nous plaçons le coefficient du carré dans une quatrième ligne. Nous additionnons les quatre lignes, d'où il provient ce qui se trouve au-dessus du trait, et cela est le résultat du premier membre de l'équation.

Ensuite nous multiplions le carré-carré par le coefficient du cubo-cube, et f. 203 r. nous posons cela dans une première ligne. | Nous multiplions le cube par le coefficient du quadrato-cube et nous posons cela dans une seconde ligne. Puis nous multiplions le carré par le coefficient du carré-carré, et nous posons cela dans une troisième ligne. Nous additionnons ces trois lignes, et il résulte ce qui se trouve au-dessus du trait. Cela est le résultat du second membre de l'équation, et est conforme au premier

		30293370
le premier résultat	premier	16777210
	second	10483760
	troisième	10308000
	quatrième	18662400

		30293376
le second résultat	premier	30212090
	second	22118400
	troisième	03962880

Il est évident par là que la différence entre les deux parties est deux carrés moins dix, et non dix moins deux carrés, si par hasard vous aviez d'abord supposé cette différence égale à dix moins deux carrés.

Vous êtes arrivé, dans cet exemple, à ce qui a été expliqué précédemment, à savoir que l'on ne doit pas affirmer qu'une solution ne peut pas être juste, à moins d' avoir passé, pour les deux résultats opposés qui résultent de l' augmentation après la diminution, d'un nombre au nombre immédiatement suivant. Alors la justesse sera déterminée dans cette dernière forme. Conduisez donc l'opération dans ce cas conformément à ses conditions, et vous opérerez juste, si Dieu, le Très-Haut, le permet.

J'ai proposé tous les problèmes de cette section comme des (cas particuliers) dérivés d' un seul (problème) fondamental, afin de rendre évident par là que de tous les problèmes précédemment mentionnés il peut être déduit une infinité (de cas particuliers).

Que ceci soit la fin de ce que nous avons présenté dans cette composition bénie. Dieu seul connaît la vérité.

L'achèvement de cet (ouvrage) eut lieu à l'aube du jour béni de mercredi, le sixième (jour) du mois sacré de Dzoûl-hidjdjah de l' année huit cent trente quatre (1), par la main de celui qui a besoin du Dieu Très-Haut, qui l'a écrit et composé, Ahmed Ibn Almadjdî le châféite, puisse Dieu pardonner à lui, à ses père et mère, et à tous les musulmans, amen, amen. Que la bénédiction et

(1) Cette date correspond au mercredi, 15 août 1431 de J.-C.

le salut de Dieu soient sur la plus noble de ses créatures, Mohammed, et sur sa famille.

Ceci est la fin de ce que j' ai trouvé dans l'exemplaire de mon seigneur, qui fut écrit de sa main, puisse Dieu le Très-Haut prolonger sa vie; sur lequel (exemplaire) j'ai copié le présent exemplaire. L'achèvement de la copie du présent exemplaire eut lieu vers midi, le lundi, dix-septième (jour) du mois de Rabia second de l' année huit cent quarante (1). Et cette copie fut faite pour son propre usage, et pour l' usage de qui il plaira à Dieu après lui, par l'esclave qui a besoin de la miséricorde de son maître le riche et l'éternel, Aboûl Baraqât Mohammed Ben Mohammed Ben Mohammed Al'irâki, puisse Dieu pardonner à lui, à ses père et mère, aux docteurs (qui l' ont instruit), et à chacun de tous les musulmans, amen. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons. Dieu nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs.

(1) Le Catalogue des Mss. orientaux du British-Museum donne ici, comme date du mois, dans le texte qu'il reproduit, le vingt septième, et dans la traduction latine dont il accompagne ce texte, le vingt-sixième. L' un et l' autre est erroné. Le Ms. porte en réalité le dix-septième; et ce qui prouve en outre que cette leçon est la bonne, c'est que le jour dont il s'agit doit être en Lundi (feria secunda), ce qui a lieu en effet pour le 17 Rabia II de l' année 840 de l'hégire qui correspond au lundi 29 octobre 1436 de J.-C., tandis que le 27 Rabia II de l'année 840 de l'hégire est un Jeudi.

Manuscrit coté CCCCXIX des manuscrits orientaux du British Museum (7470 des manuscrits additionnels)

(Volume in 4° de 114 feuillets en papier, dont les deux premiers, et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés. Les 110 autres feuillets sont numérotés aux rectos avec les numéros 1 à 110 écrits au crayon en chiffres modernes, et aux versos avec les numéros 1 à 100 et 1 à 10 écrits à l'encre en chiffres arabes orientaux.

Ce manuscrit est occupé depuis lig. 1 du verso du feuillet numéroté 3, jusqu'à lig. 11 du recto du feuillet numéroté 110, par la copie d'un Traité intitulé « La clé du calcul » par Djamchîd Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth (Eddîn) Alqâchânî. La copie est datée du lundi, (2 ?) Chawwâl de l'année 997 de l'hégire, ou (probablement) 14 août (1), 1589 de J.-C.

Le verso du feuillet numéroté 1, et le recto et verso du feuillet numéroté 2, sont occupés par un premier projet de la préface qui se distingue de la rédaction qui occupe le verso du feuillet numéroté 3, particulièrement en ceci qu'il renferme une dédicace adressée au célèbre Sultan de Samarkand, Oouloug Beg Goûrgân, et une table très étendue des contenus des chapitres de l'ouvrage entier.

L'auteur fut un des astronomes qui prirent part à la rédaction des Tables d'Oouloug Beg, mais mourut avant l'achèvement de cette œuvre. Comparer *Thomas Hyde*, Tabulae long. ac lat. stellarum fixarum, ex observatione Ulugh Beighi; Oxonii, 1665, in-4.°, douzième page (non numérotée) de la « Praefatio ad » lectorem », lignes 3 à 4 et 18 à 21. La préface de la « Clé du calcul » dont je fais suivre ici la traduction, contient des indications nombreuses et intéressantes sur les autres ouvrages de Djamchîd Ben Mas'oûd.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 22 à 25 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon et mentionnée ci-dessus).

---

f. 3 v. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Louange à Dieu qui est unique pour la création des unités, et qui est seul cause de la composition des nombres (2). Que sa bénédiction soit sur la meilleure de ses créatures, Mohammed, le plus puissant des intercesseurs au jour terrible de la résurrection, sur sa famille, et sur ses enfants qui guident dans les chemins du salut et de la bonne direction.

Pour en venir au fait. Celui qui, parmi les créatures de Dieu, le Très-Haut, a le plus besoin de son pardon, Dyamchîd Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth Alqâchânî, que Dieu fasse prospérer sa situation, dit:

J'ai fait des opérations du calcul et des règles géométriques l'objet d'une étude approfondie, de sorte que j'en ai saisi les vrais procédés et que je suis parvenu au plus haut point dans leurs finesse. J'en ai éclairci les parties obscures et difficiles, et j'en ai résolu les questions douteuses et compliquées. J'ai découvert des règles et des théorèmes nombreux concernant ces sciences, et j'ai obtenu la solution de problèmes qui avaient paru tellement ardus à beaucoup d'autres savants qu'ils avaient renoncé à s'en occuper. C'est ainsi que j'ai refait le calcul

---

(1) Le mois de Chawwâl de l'année 997 de l'hégire comprend 4 lundis qui correspondent respectivement aux 14, 21, 28 août et 4 septembre de l'année 1589 de J.-C. La date numérique du jour du mois manque dans le manuscrit.

(2) Dieu est le représentant par excellence de l'unité, et l'unité est, per le moyen de la composition, le principe de la formation des nombres, « fons et origo numerorum ».

de toutes les colonnes des tables Ilkhâniennes (1) d'après les méthodes les plus exactes, et que j'ai composé les tables appelées Khâkâniennes en vue de compléter les tables Ilkhâniennes (2). J'y ai réuni tout ce que j'ai inventé en fait d'opérations astronomiques, et qui ne se trouvait point dans d'autres tables, en y ajoutant des démonstrations géométrique. J'ai composé aussi les Tables servant à faciliter les opérations, et divers autres tableaux.

J'ai composé, en outre, des mémoires, (tels que le mémoire intitulé) le Parfait, sur les (3) doutes qui se sont présentés aux anciens au sujet des distances et des volumes ; le mémoire (intitulé) le Contenant, sur le rapport du diamètre à la circonférence, et le mémoire (intitulé) la Corde et le Sinus, sur la manière de déterminer ces deux (lignes) pour le tiers d'un arc dont on connait la corde et le sinus. Ce dernier (problème) est encore un de ceux qui ont offert des difficultés aux anciens, ainsi que l'a dit l'auteur de l'Almageste en s'exprimant à ce sujet en des termes qui signifient ce qui suit. Il n'existe pas de méthode en aucune façon, pour connaitre linéairement la corde du tiers d'un arc dont on connait la corde. Or, puisqu'il en est ainsi, nous avons imaginé un artifice pour trouver la corde d'un dégré avec une approximation très-exacte (4). Et pareillement il a dit auparavant, au sujet de la manière de trouver la corde d'un demi-degré, qu'il n'existe pas de méthode pour la déterminer (d'une manière absolue).

J'ai aussi inventé l'instrument appelé le Disque des zones, et j'ai écrit sur la manière de le construire et d'(en) connaitre (l'usage) un mémoire intitulé les Délices des jardins. C'est un instrument qui sert à déterminer les longitudes vraies des planètes, leurs latitudes, leurs distances de la terre, leurs rétrogradations, les occultations et les éclipses, et tout ce qui s'y rattache.

J'ai trouvé des réponses à des questions nombreuses que m'avaient proposé les plus distingués des calculateurs, soit pour me mettre à l'épreuve, soit pour s'instruire; et quoique ces questions n'aient pas été toutes réduisibles aux six cas algébriques (5), je suis parvenu, à l'occasion de ces opérations, à des théorèmes nombreux, à l'aide desquels les opérations du calcul peuvent être

(1) Les Tables Ilkhâniennes furent composées par le célèbre astronome Nacir Eddin Althoûci (né en 1201 et mort en 1274 de J.-C.) en honneur du Khân mongol Houlagou qui mit fin au Khalifat de Bagdâd par la conquête de cette ville en 1258 de J.-C., et qui fit construire pour Nacir Eddin l'observatoire de Merâghah.

(2) Ces mots à partir de « appelées » sont laissés en blanc dans le texte ms. Je les ai rétablis au moyen du passage correspondant, fol. 1 v°. du ms., dans le premier projet de la préface.

(3) Au lieu des mots « le Parfait, sur les », le passage correspondant du fol. 1 v°. porte: « par exemple le mémoire intitulé L'echelle du ciel, sur la solution des ».

(4) Comparer : Composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite etc. Par M. Halma, T. I, Paris, 1813, in-4°. Pag. 34, lig. 5 et suiv. du texte grec. Il me semble qu'en cet endroit la traduction française ne serre pas d'assez près les expressions de l'original.

(5) C'est à dire à des équations du premier ou du second dégré. Les six cas dont il s'agit sont représentés par les équations

$$x = a,\quad x^2 = ax,\quad x^2 = a,\quad x^2 + ax = b,\quad x^2 + a = bx,\quad x^2 = ax + b$$

traitées de la manière la plus aisée, d'après la méthode la plus facile, avec le moindre travail, avec la plus grande utilité, et en présentant l'exposé le plus clair.

J'ai donc jugé convenable de les ressembler dans un recueil, et j'ai formé l'intention de les développer avec clarté, de manière que ce soit un manuel pour les amateurs, et un moyen d'augmenter encore la perspicacité des personnes douées d'intelligence.

f. 76 r. *Exemple.* Nous désirons (connaître) la somme des résultats des produits (formés) pour chacun des nombres jusqu'à six, (en multipliant d'abord chaque nombre) par le (nombre) suivant, puis le résultat par le (nombre) suivant. Nous additionnons (les nombres) depuis l'unité jusqu'au cinq. Ce sera quinze. Nous multiplions cela par quatorze. Il résulte deux cent dix, ce qui est la quantité cherchée (1).

Douzième règle. Si nous désirons (connaître) la somme des carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à combien nous en voulons, nous additionnons une unité au double du dernier nombre et nous multiplions un tiers de la somme par la somme des dits nombres (2).

Exemple. Nous désirons additionner les carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous ajoutons au double de ce (dernier nombre) une unité. Il résulte treize, ce dont le tiers est quatre et un tiers. Nous multiplions cela par la somme des dits nombres, laquelle est vingt et un. Il résulte quatre-vingt onze.

Treizième règle. Si nous désirons additionner les cubes des (nombres) suivant l'ordre depuis l'unité (jusqu'à) combien nous en voulons, nous multiplions la somme de ces nombres par elle-même; il résultera la quantité cherchée (3).

Exemple. Nous désirons (connaître) la somme des cubes des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous additionnons ces nombres. Ce sera vingt et un. Nous multiplions cela par lui-même. Il résulte quatre cent quarante et un, ce qui est la quantité cherchée.

Quatorzième règle. Si nous désirons (connaître) la somme des carré-carrés des nombres suivant l'ordre à partir de l'unité, nous retranchons de la somme de ces nombres une unité et nous prenons constamment un cinquième (4) du reste. Nous l'ajoutons à la somme des dits nombres, et nous multiplions ce qui

---

(1) $$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2)(n-1)n =$$
$$= [1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)].$$
$$[1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) - 1].$$

(2) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n+1}{3}[1 + 2 + 3 + \dots + n].$$

(3) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \dots + n]^2$$

(4) Le texte ms. porte ici « un tiers ». Mais l'exemple qui suit prouve que ce n'est qu'une erreur de copiste.

en provient par la somme des carrés des mêmes nombres. Il résultera la quantité cherchée (1).

Exemple. Nous désirons additionner les carré-carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous prenons la somme de ces nombres, ce qui est vingt et un. Nous en retranchons une unité; il reste vingt. Nous en prenons le cinquième, ce qui est quatre. Nous l'ajoutons à vingt et un; il provient vingt cinq. Nous multiplions cela | par quatre-vingt onze, ce qui est la f. 76 r.
somme des carrés des mêmes nombres. Il résulte deux mille deux cent soixante quinze.

Quinzième règle. Si nous désirons (connaître) la somme des puissances suivant l'ordre pour un nombre quelconque à partir de la première puissance, ce qui fait encore partie de ce que nous avons découvert (2), nous retranchons de la dernière puissance constamment une unité, et nous multiplions le reste par la première puissance. Nous divisons (ensuite) le résultat par un nombre moindre d'une unité que la première puissance. Ce qui résulte est ce que nous avions désiré.

Autre manière. Nous retranchons de la dernière puissance la première puissance, et nous divisons ce qui reste par un nombre moindre d'une unité que la première puissance. A ce qui en résulte nous ajoutons la dernière puissance, afin qu'il résulte la quantité cherchée (3).

Exemple de la première manière. Etc.

---

(1) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \left[\frac{1}{5}\left\{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n - 1\right\} + \left\{1+2+3+\ldots+n\right\}\right]\cdot$

$$\left\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right\} = \frac{1}{30}\left\{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n\right\}.$$

(2) Le texte ms. fait suivre ici le passage que voici: « nous multiplions la première puissance par la » dernière puissance et nous retranchons une unité de la première puissance; ce qui résulte est la quantité » cherchée. *Exemple*. » Après ce dernier mot le texte continue avec « Nous retranchons etc. » Il est évident que ce passage ne se trouve intercalé à cette place que par la méprise d'un copiste très négligent. En général cette partie du ms. est copiée avec peu de soin.

(3) $$a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{(a^n - 1)a}{a-1} = \frac{a^n - a}{a-1} + a^n.$$

IMPRIMATUR — Fr. Hier. Gigli Ord. Praed. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR — P. De Villanova Castellacci Archiep. Petrae Vicesg.

PASSAGES RELATIFS

A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES

EXTRAITS

DE TROIS MANUSCRITS ARABES INÉDITS

DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE DE PARIS

COTÉS N.os 951_2, 951_3 ET 952 DU SUPPLÉMENT ARABE.

EXTRAIT DU TOME V. N.° 3.

DES ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

PASSAGES RELATIFS

A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES

EXTRAITS

DE TROIS MANUSCRITS ARABES INÉDITS

DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE DE PARIS

COTÉS N.os 951_2, 951_1 ET 952 DU SUPPLÉMENT ARABE

PAR M. F. WOEPCKE

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ORIENTALE ALLEMANDE
ET DU CONSEIL DE LA *SOCIÉTÉ ASIATIQUE* DE PARIS,
ET MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES *NUOVI LINCEI*.

ROME
IMPRIMERIE DE PROPAGANDA FIDE
1864

S'il est important d'examiner et de décrire le développement de l'ensemble des sciences mathématiques chez une nation déterminée, ou à une époque particulière, une tâche non moins intéressante, ni moins utile pour l'histoire des mathématiques, consiste à suivre à travers les temps et les peuples certains problèmes qui reparaissent, pour ainsi dire, partout où l'esprit humain s'est occupé de mathématiques.

Ces questions et ces théories se reproduisent et se continuent comme un fil non interrompu, fil d'Ariane qui, retrouvé et renoué par des investigations persévérantes, permet de découvrir le chemin que les sciences exactes ont suivi depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours, et qui révèle la marche de ces communications par lesquelles plusieurs fois la science, menaçant de s'éteindre entre les mains d'une race épuisée, a été transmise à d'autres parties du genre humain destinées à conserver les connaissances acquises et à les augmenter par de nouveaux progrès.

L'ingénieuse idée que j'ai tâché de formuler dans les lignes qui précèdent, appartient à M. le Prince Boncompagni que ses importants travaux sur l'histoire des mathématiques, et les recherches vraiment immenses servant de base à ces travaux, ont admirablement préparé à choisir avec sûreté les sujets les plus propres de ce nouveau genre d'études historiques.

M. le Prince Boncompagni m'a fait l'honneur de me faire part de ces projets, et de m'inviter à rechercher pour quelques uns des problèmes dont il s'agit, les traces que je pourrais en découvrir dans des manuscrits orientaux inexplorés jusqu'à présent.

Les pages qui suivent présentent les résultats de l'examen auquel j'ai soumis, relativement à un de ces problèmes, une partie des manuscrits orientaux de la Bibliothèque impériale de Paris.

J'ai traduit la première et la dernière page de chacun des traités dans lesquels j'ai remarqué des passages relatifs à ce problème, ainsi que toutes les pages contenant ces passages.

Manuscrit coté $\frac{95}{2}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Volume in-4.o de 132 feuillets en papier dont le premier et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 129 autres sont numérotés avec deux numérations consécutives dont la première va de 1 à 71, et la seconde de 1 à 58.

Feuillet 1 *v.* lig. 1 à 69 *v.* lig. 11 de la première numération: Commentaire du *Talkhîs* ou « Exposé des opérations » du calcul », traité d'arithmétique pratique d'Ibn Albannâ, mathématicien et astronome qui florissait au Maroc dans la première moitié du XIII. siècle, par Alkalaçâdî, mathématicien arabe-espagnol, mort en 1486 de J.-C. La copie est datée du 29 ramadhân 1229 de l'hégire, ou 14 septembre 1814 de J.-C.

Feuillet 69 *v.* lig. 16 a 71 *v.* lig. 7 de la première numération: Morceau relatif à quelques questions chronologiques par Aboû Zaid Abdalrahmân Ibn Omar Al'okaili Alçoûneei.

Feuillet 1 *r.* lig. 1 à 58 *v.* lig. 24 de la seconde numération: Autre commentaire, sans nom d'auteur, du Talkis d'Ibn Albannâ.

Comparer sur ce Manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de Février—Mars 1862, pag. 105, lig. 18 à pag. 107, lig. dernière.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 5 à 12 de la traduction ci-après se rapportent à la première des deux numérations du manuscrit).

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre Seigneur Mohammed ! f. 1 *v.*

Le serviteur du Dieu très-haut, celui qui a besoin de son pardon, Alî Ben Mohammed Ibn Mohammed Ben Alî le Koraïchite Alandalouci Albasthî, connu sous le nom d'Alkalaçâdî, que Dieu très-haut soit miséricordieux envers lui, amen, amen, amen, amen, dit:

Louange à Dieu qui a créé l'homme par sa grâce, et qui l'a fait exister pour ce qu'il a résolu et décrété par la volonté de ses jugements et de sa puissance. Que la bénédiction et le salut divins soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

Pour en venir au fait. Le but que se propose (le présent ouvrage) est l'explication de « *L'exposé des opérations du calcul* » du chaïkh, du très-savant imâm, Ahmed, surnommé le fils de l'architecte (Ibn Albannâ), l'habitant de Maroc, puisse-t-il être agréable à Dieu, et puisse Dieu le rendre content. L'intention de (l'auteur) est que cette introduction forme le commencement du travail qu'il se propose d'entreprendre dans cet ouvrage, et qu'il indique dans le contenu de cette (introduction) ce qu'ont mentionné les anciens relativement à celui qui écrit un ouvrage sur une science, à savoir qu'il faut qu'il y fasse attention aux huit points capitaux suivants: le but, l'utilité, le caractère, la méthode de l'enseignement, l'ordre, le nom de l'auteur, la justesse, et la division.

L'auteur, que Dieu soit miséricordieux envers lui, a réuni implicitement ces huit points dans cette introduction, ainsi qu'il l'a exprimé dans certains vers que voici:

> Je me suis appliqué à être concis dans mon exposé,
> Parce que je connais les différentes parties de la science
> et parce que je sais abréger.
> Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que
> je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,
> Et je ne cherche rien au delà de ce qui est suffisant pour moi.
> Cependant je crains le blâme des grands hommes,
> Et certainement les savants accomplis sont en droit
> de suivre une autre voie,
> Mais le devoir de la chamelle est d'enseigner les
> petits (*).

L'auteur dit: *Le but* (**), c'est à dire l'objet, *dans cet ouvrage*, c'est à dire cet écrit, *est de donner un exposé fait avec choix*, c'est à dire un exposé élégant et concis, *des opérations du calcul, de faire comprendre promptement ses règles*, c'est à dire de rendre les règles de l'ouvrage facilement accessibles, *ainsi que le sens des théories*, au moyen des problèmes placés chacun dans le chapitre de la règle qui le concerne et qui lui convient, *et de présenter dans un ordre sévère les bases et le système de cet art. Il comprend deux parties*, c'est à dire cet ouvrage (comprend deux parties), *dont la première traite des opérations du nombre connu*, en fait d'entiers, de fractions et de racines, *tandis que la seconde traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à la connaissance de la grandeur de l'inconnue qui est cherchée, en partant des quantités connues et données*, c'est à dire au moyen desquelles il est possible de déterminer l'inconnue, ainsi qu'il sera expliqué plus tard, si Dieu le permet, dans la seconde partie de l'ouvrage. (Cette seconde partie traite) de la manière d'opérer avec les proportions et avec les plateaux de balance (***), de l'algèbre, et de ce qui se rattache à cela. Comme si l'on vous

(*) Le texte de ces vers que présente ici le manuscrit, me paraît très-corrompu: en outre la première partie du manuscrit (fol. 1 à 71 de la première numération) est d'une fort mauvaise écriture. Les mêmes vers sont reproduits avec certaines variantes, et sous une forme plus correcte, au fol. 1 r.° de la seconde numération.

(**) Les mots imprimés en italique forment la traduction des parties du texte de l'ouvrage commenté, intercalées au milieu du commentaire et écrites, dans le manuscrit arabe, à l'encre rouge. J'ai aussi mis en italique quelques passages qui ne sont pas écrits à l'encre rouge dans le manuscrit, mais qui font cependant partie du texte commenté, ainsi que je l'ai reconnu par un examen du second commentaire du *Talkhis*, contenu dans ce manuscrit, et d'un troisième commentaire contenu dans le manuscrit 551 du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(***) Ce nom désigne la règle des deux fausses positions.

dit: on additionne le tiers et le quart d'une quantité, et cela fait tant; ou l'on additionne le tiers et le quart et le cinquième d'une quantité, et cela fait tant; combien est cette quantité? L'auteur dit (que cette détermination de l'inconnue par les connues est possible) *lorsqu'il existe entre l'une et les autres une relation qui détermine cette* (dépendance). Cette relation | est le rapport qui existe entre les nombres etc. fin de f. 1 v.

Si l'on vous dit: combien est la somme de huit nombres dont les plus petit est deux, et qui se dépassent mutuellement de quatre? | Alors multipliez l'excès par le nombre des nombres (termes) moins un, ce qui donne vingt huit. Ajoutez-y le deux; ce sera trente, ce qui est le plus grand (des nombres). Ensuite ajoutez au trente le premier nombre, ce qui fait trente deux. Multipliez cela par quatre, la moitié du nombre des nombres. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir cent vingt huit. En voici la figure, et Dieu seul connaît la vérité. f. 8 r.

.·. 2 .·. 6 .·. 10 .·. 14 .·. 18 .·. 22 .·. 26 .·. 30 .·.

L'auteur dit: *Quant à la sommation des nombres suivant l'ordre, elle consiste à multiplier la moitié du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend par le* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend plus l'unité.* Ceci est la troisième espèce de l'addition, et d'après ce que l'auteur dit, l'opération est claire. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre naturel des nombres, alors ajoutez un au dix; ce sera onze. Multipliez cela par la moitié du dix; vous aurez pour résultat cinquante cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit: additionnez depuis un jusqu'à dix-huit, alors ajoutez un au dix-huit; ce sera dix-neuf. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir par neuf. Vous aurez pour résultat cent soixante onze, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *et l'élévation au carré* (*se fait*) *par la multiplication de deux tiers du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend plus un tiers d'une unité, par la somme* (*des nombres simples*). Cela veut dire l'élévation au carré de l'addition des nombres suivant l'ordre, ce qui deviendra plus clair par notre exemple. Si l'on vous dit: additionnez à partir du carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce (problème) consiste à prendre deux tiers du dix, ce qui fait six et deux tiers, et à ajouter à cela un tiers d'une unité, de sorte que la somme sera sept. Multipliez cela par la somme (des nombres simples) à savoir par cinquante cinq; vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent quatre-vingt cinq.

L'auteur dit (*): *et l'élévation au cube* (*se fait*) *par l'élévation au carré de la* f. 8. r. lig. 19.

(*) Je rappelle que « l'auteur » de l'ouvrage commenté est Ibn Albannâ. La règle pour la sommation des cubes qui suit ici, appartient donc à Ibn Albannâ, contemporain de Léonard de Pise.

somme (*). Cette somme veut dire celle qui résulte de l'sddition des nombres (simples) suivant l'ordre. Et le cube signifie, d'après ee qui a été expliqué, le produit de la multiplication d'un nombre par lui-même et puis du résultat par sa racine. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez à partir du cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme (des nombres simples) à savoir einquante einq. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois mille vingt cinq,
f. 8 r. lig. 24. aiusi: 3025.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce (de l'addition), et c'est la plus facile de ces espèces. La manière de l'effectuer est claire, d'après ce que l'auteur a expliqué. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, (en prenant) |
f. 8 v. les nombres impairs suivant l'ordre, alors ajoutez l'unité au neuf, ce qui fait dix. Élevez-en la moitié, à savoir cinq, au carré. Il résultera vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à vingt trois, alors additionnez l'nnité au vingt trois, ce qui fait vingt quatre. Élevez au carré la moitié de eela, à savoir douze. Vous aurez pour résultat cent quarante quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* C'est à dire l'élévation au earré de tous les nombres impairs. Et « le rectangle » est le produit d'un nombre par un (autre) nombre. L'auteur dit « par après » par précaution, afin qu'on ne s'imagine pas qu'il s'agit du produit des deux nombres qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. L'éclaircissement de cela se trouvera dans notre exemple. Si l'on vous dit: additiounez à partir du carré de l'unité jusqu'au earré de neuf, alors prenez un sixième du neuf, ce qui est un et demi. Formez le rectangle des deux nombres qui suivent le neuf, à savoir du dix et du onze. Leur rectangle est ceut dix. Multipliez cela par le un et demi. Il résultera cent soixante cinq, ce qui est la quantité cherchée.

f. 8 v. lig. 13. L'auteur dit: *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double moins un* (**). Cette élévation au eube (doit s'entendre de) l'addition des nombres impairs. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au eube de neuf, alors vous savez déjà que la somme (des impairs simples) est vingt cinq, et le double de cela moins un est quarante neuf. Par conséquent multipliez le vingt cinq par le quarante neuf. Vous aurez pour résultat mille deux cent vingt cinq,

---

(*) C'est à dire $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$.

(**) C'est à dire $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

ainsi: 1225. | Règle fondamentale. Si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de f. 8 r. lig. 18.
l'unité, suivant l'ordre des nombres impairs, jusqu'à un nombre inconnu, et le résultat sera tant; alors multipliez ce résultat par huit, et additionnez au produit une unité. Prenez la racine de la somme, et ajoutez à la racine de nouveau une unité. Prenez la racine de ce résultat et retranchez-en une unité. Ce qui provient est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend (*). Par exemple, si l'on vous dit: on a additionné depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un certain nombre suivant l'ordre des nombres impairs, et le résultat a été mille neuf cent quatre-vingt dix (**). Alors multipliez cette somme par huit, et ajoutez au produit une unité. Vous aurez en somme cent cinquante neuf mille deux cent et un. Prenez-en la racine, qui est trois cent quatre-vingt dix-neuf. Ajoutez à cela une unité, ce sera quatre cents. Prenez-
en la racine, qui est vingt, et retranchez-en l'unité. Vous aurez pour reste | dix- f. 9 r.
neuf, ce qui est le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend. La manière d'exécuter cette opération se présentera encore, si Dieu le permet, dans le problème
du château (***), traitée au moyen de l'algèbre. | f. 9. r. lig. 2.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.* Ceci est la cinquième espece de l'addition. Et l'opération, d'après ce que l'auteur a dit, est claire. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à dix, alors ajoutez au dix deux, ce qui fait douze. La moitié de cela, à savoir six, multipliée par la moitié du dix, donne trente, ce qui est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à vingt deux, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, deux, ce qui fait vingt quatre. Multipliez cela (****) par la moitié du vingt deux. Vous aurez pour résultat cent trente deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* C'est à dire l'élévation au carré des nombres pairs. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de deux jusqu'au

(*) C'est à dire, si $1^3+3^3+5^3+\ldots+x^3=k$, on aura $\sqrt{\sqrt{k.8+1}+1}-1=x$.

(**) C'est ainsi que porte la ms. Mais cette leçon est fausse ; il faut lire: dix-neuf mille neuf cents, c'est à dire 19900 au lieu de 1990.

(***) Le mot que je traduis ici par « château » signifie aussi « selle ». Or, l'ouvrage d'Ibn Al-bannâ, commenté ici par Alkalaçadî, était un abrégé d'un ouvrage appelé « La petite selle » (Voir Journal asiatique cahier d'octobre-novembre 1854, pag. 371, lig, 1 à 7). Il est donc possible que Alkalaçâdî fasse ici allusion à un problème contenu dans ce dernier ouvrage, de sorte qu'il faudrait traduire: « dans le problème proposé dans (l'ouvrage intitulé) *la petite selle* »

(****) C'est ainsi que porte le ms. Il faut lire: multipliez la moitié de cela.

carré de douze. Alors vous savez en vertu de ce qui précède, que la somme (des pairs simples) est quarante deux. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers de douze, ce qui est huit, et ajoutez-y deux tiers, ce qui fait huit et deux tiers. Multipliez cela par le quarante deux. Vous aurez pour résultat la quantité cherchée, à savoir trois cent soixante quatre.

L'auteur dit : *ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* Ceci est une seconde manière de l'élévation au carré des nombres pairs. Son éclaircissement, au moyen de notre exemple, consiste en ce que vous multipliez le sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir de douze, par le rectangle compris sous treize et quatorze, à savoir par cent quatre-vingt deux. Ce (produit) sera la quantité cherchée.

f. 9 r. lig. 20. L'auteur dit: *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double* (*). Ceci est l'élévation au cube en additionnant les nombres pairs. La somme est dans notre exemple quarante deux, et son double est quatre-vingt quatre. Si l'on en fait le rectangle, le produit est
f. 9 r. lig. 23. trois mille cinq cent vingt huit, ce qui est la quantité cherchée. |

Remarque additionnelle, relative au cas où l'on vous dit : additionnez à partir d'un nombre qui n'est pas un, ou qui n'est pas deux, d'une manière semblable à ces additions (qui précèdent). L'opération en ce cas consiste à faire d'abord l'addition à partir de l'unité ou à partir du deux, et à retrancher ensuite de la somme ce qui résulte de (l'addition faite jusqu'au nombre) proposé dans le problème (comme commencement de la suite). L'auteur n'a pas signalé ce (cas) dans le présent ouvrage,
f. 9 v. mais il l'a signalé dans les discours (**). Par exemple si | l'on vous dit: additionnez depuis cinq jusqu'à seize suivant l'ordre naturel des nombres, alors additionnez d'abord depuis l'unité jusqu'au seize, d'après ce qui précède. Vous aurez pour résultat cent trente six. Réservez cela. Ensuite retranchez du cinq une unité. Il reste quatre. Additionnez depuis un jusqu'à quatre, vous aurez pour somme dix. Retranchez cela du (nombre) réservé, vous aurez pour reste cent vingt six, et telle est la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis six jusqu'à quatorze en prenant les nombres pairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord depuis deux jusqu'à quatorze. Ce sera cinquante six. Réservez cela. Ensuite retranchez du six deux; il vous restera quatre. Additionnez depuis deux jusqu'à quatre, ce sera six. Retranchez cela du (nombre) réservé. Vous aurez pour reste cinquante, ce qui est

(*) C'est à dire $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2\left[n(n+1)\right]^2$.

(**) Cela peut signifier que l'auteur, Ibn Albannâ, a exposé ces règles verbalement, ou qu'il les a exposées dans un ouvrage intitulé « les discours, » ou dans un ouvrage divisé en « discours, » c'est à dire en « livres. »

la quantité cherchée. Et si l'on vous dit : additionnez depuis sept jusqu'à onze en prenant les nombres impairs suivant l'ordre, alors additionnez d'abord depuis un jusqu'à onze, ce qui fait trente six. Ensuite retranchez deux de sept. Il reste cinq. Additionnez depuis un jusqu'à cinq, ce sera neuf. Retranchez cela du (nombre) réservé. Il reste vingt sept, ce qui est la quantité cherchée. Et vous règlerez d'une manière analogue l'opération pour l'élévation au carré et pour l'élévation au cube (*). f. 9 r. lig. 14.

TROISIÈME CHAPITRE

DE LA SOUSTRACTION

L'auteur dit : *La soustraction est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci s'applique à l'exécution écrite de la soustraction. Dans certains de ses ouvrages (Ibn Albannà) a dit que la signification de la soustraction consiste à faire connaître la différence entre deux nombres différents par rapport à la quantité, dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. Il n'a pas rencontré la vraie définition de cette (opération) dans le « Soulèvement du rideau » (**). Le plus convenable est de dire que la soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand. L'auteur dit: *Elle (se fait) de deux manières. L'une consiste à retrancher le plus petit du plus grand une seule fois.* C'est celle par laquelle on commencera dans le présent chapitre; comme si l'on vous dit: retranchez treize de trente sept (***). Alors vous direz: le reste est vingt quatre. Lauteur dit: *L'autre espèce consiste à retrancher le plus petit du plus grand plus d'une seule fois.* Ceci est le chapitre de la preuve (****), ainsi qu'il sera exposé plus tard, si Dieu le permet. Comme si l'on vous dit: retranchez du trente cinq (constamment) sept (*****). Ou bien, il en restera un excédant, comme (si vous prenez) quarante et un (******). L'auteur dit :

(*) Ceci comprend la sommation des séries:

$$m^3+(m+1)^3+(m+2)^3+\ldots.+(m+n)^3,$$
$$(2m)^3+(2m+2)^3+(2m+4)^3+\ldots+(2m+2n)^3.$$
$$(2m+1)^3+(2m+3)^3+(2m+5)^3+\ldots+(2m+2n+1)^3.$$

(**) Cet ouvrage d'Ibn Albannâ est mentionné dans le passage d'Ibn Khaldoûn dont le texte et la traduction se trouvent dans le cahier d'octobre-novembre 1854 du Journal asiatique, pag. 370 et suiv.

(***) Le texte du ms. porte par erreur *six* au lieu de *sept*.

(****) C'est l'opération décrite dans le 5.e chapitre de la première Partie de l'Arithmétique d'Alkalaçâdî. Pag. 252 à 255 des Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, Anno XII.

(*****) Le copiste paraît ici avoir oublié quelques mots exprimant à peu près ceci: « et dans cet exemple il ne vous restera aucun excédant ».

(******) En effet, si l'on retranche de 41 autant de fois 7 qu'il est possible, il reste l'excédant 6.

Pour la première espèce, il faut placer le (nombre) dont on retranche dans une ligne, et au-dessous le nombre qu'il s'agit de retrancher, de la même manière comme dans l'addition; puis il faut retrancher chaque place (c'est à dire chaque
f. 10 r. *chiffre) de celui qui lui correspond, | s'il y en a un qui lui correspond* (*).

. . . . Vous aurez pour résultat (**) deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre déficient. Il a comme parties: une moitié, à savoir cent quarante deux; un quart, à savoir soixante et onze; un soixante-et-onzième, à savoir quatre; la moitié
f. 69 v. de la (fraction précédente), à savoir deux; et la moitié de celle-ci, à savoir | un. La somme de ces parties est deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant. Celui-ci a comme parties : une moitié, à savoir cent dix; un quart, à savoir cinquante cinq; un cinquième, à savoir quarante quatre; un dixième, à savoir vingt deux; une moitié de dixième, à savoir onze; puis en fait de fractions non articulées (***): un onzième, à savoir vingt; et la moitié de cela, à savoir dix; et le quart de cela à savoir cinq; et le cinquième (du onzième), à savoir quatre; et le dixième (du onzième), à savoir deux; et la moitié du dixième (du onzième), à savoir un. La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre déficient. Ces deux nombres sont les nombres amiables les plus petits qu'il soit possible de trouver.

Ceci est la fin de ce que je me suis proposé (de dire) sur cette matière.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers. Que sa bénédiction soit sur notre Seigneur Mohammed, le dernier et le plus parfait des prophètes, le prince des apôtres, et sur sa famille et ses compagnons. Que le salut divin soit répandu sur eux avec profusion jusqu'au jour de la résurrection.

Louange à Dieu, le Maître de l'Univers, de la part de celui qui a écrit (cette copie), et qui a besoin (de la miséricorde) de son Seigneur qui pardonne à son esclave, (à savoir) Al-bâdjdj Imâd Alfihri, puisse Dieu accorder son pardon à lui, à ses parents, aux docteurs (qui l'ont instruit), et aux docteurs de ses docteurs, jusqu'au jour de la résurrection.

(Terminé) à l'aurore du vingt neuvième jour du mois sacré du ramadhân de
f. 69 v. l'année mil deux cent vingt neuf (****). Fin. |
lig. 14. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

(*) C'est à dire si le chiffre correspondant du nombre dont on retranche, n'est pas zéro.

(**) Alkalaçâdi termine son commentaire en montrant la manière de trouver les deux *nombres amiables* 220 et 284; ces nombres jouissent de la propriété que la somme des diviseurs du premier est égale au second, et réciproquement.

(***) Ce sont les fractions qui ne peuvent pas s'énoncer au moyen des mots: une moitié, un tiers, un quart, etc. jusqu'à un dixième inclusivement, ni par la combinaison de ces mots.

(****) Cette date correspond au 14 septembre 1814 de notre ère. Le manuscrit est donc très-moderne.

Le serviteur qui a la conscience de ne pouvoir satisfaire à la justice de son Seigneur, l'illustre et lettré jurisconsulte Aboû Zaïd Abdalrahmân Ibn Omar Al'okaïli Alçoûneel, que Dieu veuille agir avec lui selon sa grâce et sa générosité, dit:

Louange à Dieu pour avoir rendu nombreux ses bienfaits et ses élus. Grâces à Dieu, pour les bienfaits abondants de son indulgence et de ses dons. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed, qui est la meilleure de ses créatures, et le dernier et le plus parfait de ses prophètes, et sur sa famille et ses compagnons, qui ont eu la bonne fortune d'embrasser sa cause et de la suivre.

Pour en venir au fait. Ceci est (un travail) qui fournit des explications faciles, intercalées entre les paroles du (traité intitulé) Al-yaçârah (« L'aisance »). Je l'offre comme un commentaire de ses paroles et de ses sens cachés, et comme un éclaircissement de ses fondements et de ses développements. Afin que ce soit un secours pour celui qui désire le comprendre, et un guide pour celui qui cherche à connaître l'explication de sa science. Et quoique ce traité soit extrêmement concis et abrégé, il n'en embrasse pas moins une branche | de la science qui est d'une grande étendue. f. 70 r.



Manuscrit coté $^{951}_{3}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Volume in-4.° de 174 feuillets en papier dont le premier et le dernier sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les autres feuillets sont numérotés au crayon avec les nombres 1 à 172.

Feuillet 1 v. lig. 1 à 74 r. lig. 20 de la numération écrite au crayon : Commentaire du *Talkis* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ, sans nom d'auteur.

Feuillet 77 v. lig. 1 à 122 r. lig. 26 de la numération écrite au crayon : Commentaire sur « l'Abrégé de la science du calcul » d'Abdoulkâdir Alçakhâwî le châféite, par Hoçaïn Ben Mohammed Almahallî le châféite.

Feuillet 123 v. lig. 1 à 172 r. lig. 15 de la numération écrite au crayon : Traité d'arithmétique pratique intitulé : « Soulèvement du vêtement de la science du calcul » par Alkalaçâdî. La copie de ce traité paraît avoir été achevée le 24 chawwâl 1143 de l'hégire, ou 2 mai 1731 de J.-C.

Comparer sur ce Manuscrit le *Journal asiatique*, cahier de Février-Mars 1862, pag. 108 lig. 1 à pag. 112 lig. 7.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 14 à 28 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon).

---

f. 1 v. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction divine soit sur notre seigneur et maître Mohammed et sur toute sa famille !

Louange à Dieu, maître de l'Univers, que sa bénédiction et son salut soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et tous ses compagnons.

Pour en venir au fait. L'objet de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, un aperçu succinct de ses règles, et un arrangement d'après un ordre sévère, de ses fondements. Il comprend deux parties. La première partie traite des opérations du nombre connu. La seconde partie traite des règles au moyen desquelles il est possible d'arriver à ce qui est inconnu et cherché en partant de ce qui est connu et donné, s'il existe entre les deux choses une relation qui rend cela nécessaire.

PREMIÈRE PARTIE, DES OPÉRATIONS DU NOMBRE CONNU.

Cette partie est divisée en trois divisions. La première division traite des opérations du nombre entier. La seconde division traite des opérations des fractions. La troisième division traite des opérations des racines.

Première division. Des opérations du nombre entier.

Cette division se partage, convenablement à son but, en six chapitres, dont le premier traite des divisions du nombre, et de ses ordres.

PREMIER CHAPITRE

Le nombre est ce qui est composé d'unités. Par conséquent l'un n'est pas appelé nombre, parce qu'il n'est pas composé d'unités. On dit aussi: le nombre est une réunion de monades (*).

Tel est tout nombre, comme le cinq, le dix, le cent, le mille.

Le nombre est divisé en pair et impair.

Le pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales. Tels sont tous les nombres dans la première place desquels il se trouve un nombre pair, comme deux, quatre, six, huit, ou dans la première place desquels il n'y a point d'unités. Le nombre impair ne jouit point de ces propriétés.

On dit aussi: le nombre pair est celui qui se laisse diviser en deux parties égales, ou en deux parties inégales, l'une étant plus grande et l'autre plus petite, pourvu qu'il soit plus grand que deux (**).

Si le nombre pair est divisé en deux parties égales, et que l'une d'elles est paire, l'autre partie est (pareillement) paire; et si (l'une des parties) est impaire, l'autre partie est (aussi) impaire. Et s'il est divisé en deux parties inégales; chacune de ces deux parties est (ou bien) impaire (ou paire). Par exemple le huit se divise en deux nombres pairs, quatre et quatre, qui sont égaux; et se divise (aussi) en cinq et trois qui sont inégaux, et chacune de ces deux (dernières parties) est impaire.

Si le nombre pair est divisé en deux parties inégales, chacune de ces deux parties se laisse diviser (***) en deux parties inégales. Ainsi le cinq et le trois sont inégaux, et pareillement les parties de chacun de ces deux nombres sont inégales.

Quant au (nombre) impair | c'est celui dont les parties etc. f. 2 r.

. . . . vous ajoutez | constamment un demi, et vous multipliez la somme par f. 7 v.
la quantité réservée. Alors ce qui résulte est la réponse. Par exemple, si l'on dit: additionnez depuis cinq jusqu'à dix-neuf suivant l'ordre des nombres (naturels), alors vous joignez le cinq au dix-neuf, ce qui fait vingt quatre, et vous réservez cela. Ensuite retranchez le premier des nombres, à savoir cinq, du plus grand des nombres, à savoir dix-neuf. Il reste quatorze. Prenez-en la moitié, qui est sept. Ajoutez-y la moitié d'une unité; ce sera sept et demi. Multipliez cela par le nombre réservé, à savoir par vingt quatre. Le résultat sera cent quatre-vingt, ce qui est la réponse.

(*) Le mot employé ici est différent du terme ordinaire pour « unité », employé par exemple lig. 2, 3 et 9 de la présente page. Le dictionnaire le traduit par « unitas, singularitas ».

(**) Le deux se divise seulement en deux parties égales 1 et 1.

(***) Le texte ajoute « seulement, » ce qui est faux. Car, par exemple, $12 = 8 + 4$, et 8 divisibile en 4 et 4 qui sont égaux.

Et si l'on dit (*): additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres élevés au carré, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, et que vous additionnez les résultats; alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres suivant leur ordre, d'après la méthode précédente, et à réserver la (somme). Ensuite vous prenez deux tiers du dernier nombre, ce qui est six et deux tiers, et vous y ajoutez un tiers de l'unité. Il résulte sept, ce que vous multipliez par le (nombre) réservé, à savoir cinquante cinq. Le résultat
f. 7 v. lig. 11. sera 385, et telle est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à dix suivant l'ordre des cubes, ce qui signifie que vous multipliez chacun des dix nombres par lui-même, que vous multipliez le résultat par son côté, et que vous additionnez les résultats; alors la méthode pour cela consiste à additionner depuis un jusqu'à dix suivant l'ordre des nombres, d'après la méthode qui précède. La somme sera cinquante cinq. Ensuite vous élevez au carré ces cinquante cinq en les multipliant par eux-mêmes. Le ré-
f. 7 v. lig. 16. sultat sera 3025, ce qui est la réponse.

La quatrième espèce (de l'addition) (**) est l'addition suivant l'ordre des nombres impairs; cela signifie que vous additionnez les impairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel. La méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre, qui est le plus grand des (nombres), constamment une unité, à prendre la moitié de la somme, et à l'élever au carré en la multipliant par elle-même. Alors ce qui résulte est la réponse.

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres élevés au carré, l'opération consiste à additionner les nombres suivant leur ordre d'après ce qui précède, et à multiplier le résultat par deux tiers du dernier (nombre), augmentés constamment d'un tiers. Le résultat sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres carrés à partir de l'unité, alors multipliez 10 par 3, ce qui est deux tiers du quatre augmentés de $\frac{1}{3}$. Et (pour) les cubes (l'opération consiste) à additionner les (nombres simples) suivant l'ordre de la même manière, et à élever le résultat au carré. Ce sera la réponse.

(**) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant à l'addition suivant l'ordre des impairs, l'opération consiste à ajouter au dernier (nombre) constamment un, et à élever au carré la moitié du résultat. Ce sera la réponse. Comme (si vous avez) quatre nombres à partir de l'unité, le résultat sera 16. Et (pour trouver la somme des impairs) suivant leur ordre en les élevant au carré, (l'opération consiste) à multiplier les deux nombres qui viennent après le dernier (nombre) dans l'ordre naturel, et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Comme (si l'on additionne) depuis 1 jusqu'à 7 en élevant au carré, le résultat est 84. Et (pour additionner les impairs) en les élevant au cube (la méthode consiste) à additionner suivant l'ordre des impairs, à doubler le résultat, à retrancher du double un, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé (*a*). Et si l'on dit: additionnez quatre cases à partir de 1, suivant l'ordre des impairs, alors élevez au carré le nombre des cases, ce sera la réponse. Vous apprenez par là que la racine (carrée) du résultat est le nombre des cases.

(*a*) C'est à dire

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3$$
$$=\left[2(1+3+5+7+\dots+\{2n-1\})-1\right].(1+3+5+7+\dots+\{2n-1\}).$$

Par exemple, si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, c'est à dire l'unité, le trois, le cinq, le sept, et le neuf; alors la méthode pour cela consiste à ajouter au dernier nombre une unité, à prendre un quart de la somme, et à le multiplier par la somme; ou à prendre le nombre des ordres des impairs que vous avez, et à multiplier ce nombre par lui-même. Donc, si vous voulez, ajoutez au neuf une unité; ce sera dix. Prenez-en la moitié, qui est cinq, et multipliez cela par lui-même. Ce sera vingt cinq, et telle est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré, ce qui signifie que | chacun de ces impairs doit être multiplié par lui-même; alors la méthode pour cela consiste à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le plus grand des impairs par après, donc à en multiplier l'un par l'autre. Ensuite multipliez ce qui résulte, par un sixième du plus grand impair. Le résultat sera la réponse. f. 8 r.

Par exemple, si l'on dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au carré; alors multipliez les deux nombres qui avoisinent le neuf par après, à savoir le dix et le onze, l'un par l'autre; ce sera cent dix. Ensuite multipliez ce cent dix par un sixième du neuf, à savoir par un et demi. Il résultera cent soixante cinq, ce qui est la réponse.

Et si l'on dit: additionnez depuis un jusqu'à neuf suivant l'ordre des impairs, en les élevant au cube, alors faites la somme suivant l'ordre des impairs, sans les élever au cube, ainsi qu'il précède. Ce sera vingt cinq. Réservez cela. Ensuite doublez-le, ce sera cinquante. Retranchez une unité du cinquante; il reste quarante neuf. Multipliez cela par le (nombre) réservé, qui est vingt cinq. Il résulte 1225, ce qui est la réponse. f. 8 r. fig. 7.

Et si l'on dit: additionnez jusqu'à la dixième case suivant l'ordre des impairs, en sous-entendant que dans la première case soit l'unité, dans la seconde trois, et ainsi de suite suivant l'ordre des nombres impairs jusqu'à la dixième case; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même. Ce qui en résulte sera la réponse. Dans le cas actuel cela est cent. f. 8 r. fig. 11.

Vous apprenez par là que, si vous avez un nombre, et que vous désirez savoir combien il contient d'impairs séparément, vous devez en prendre la racine. Ce qui résulte est le nombre des impairs contenus dans le (nombre proposé), si le commencement des (nombres impairs) est un.

Section. Si l'on vous dit : (étant proposé) le nombre cent, (combien) y est-il contenu de nombres impairs se succédant suivant l'ordre en commençant par l'unité; alors la méthode pour cela consiste à prendre la racine du nombre, à savoir de cent, qui est dix; et ce nombre (indique) combien il y a dans cent de nombres impairs suivant l'ordre en commençant par l'unité. Ce sont 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19, et ce sont dix impairs, (dix) étant le nombre de la racine du cent qui est leur somme.

3

La cinquième espèce (de l'addition) (*) est l'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs, ce qui signifie que vous additionnez les pairs tels qu'ils se suivent dans l'ordre naturel, à savoir deux, quatre, six, huit, dix, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La méthode pour cela consiste à ajouter au (nombre) pair jusqu'auquel (la suite) s'étend [deux], et à multiplier un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend augmenté de deux. Ce qui résulte est la réponse.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs, alors ajoutez deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir au dix: Ce sera douze. | Prenez-en la moitié, à savoir six, et multipliez-la par la moitié du dix, à savoir par cinq. Il résultera trente, ce qui est la réponse.

f. 8 v.

Et si l'on dit : additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des (nombres) pairs, en les élevant au carré, alors la méthode pour cela consiste en deux manières.

La première (manière est) que vous additionnez les (nombres) pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède. Ce sera trente. Réservez cela. Ensuite prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui est six et deux tiers. Ajoutez-y constamment deux tiers de l'unité. Ensuite multipliez la somme, à savoir sept et un tiers, par le (nombre) réservé. Le résultat sera deux cent vingt, et telle est la réponse.

Et si l'on vous dit: nous avons le (nombre) cent dix; combien y est-il contenu de nombres pairs ; alors la méthode pour cela consiste à ajouter au nombre donné constamment un quart de l'unité, à prendre la racine de la somme, et à en retrancher constamment la moitié d'une unité; le double (**) de ce qui reste sera le nombre des (nombres) pairs. Donc ajoutez au cent dix un quart de l'unité, ce sera cent dix et un quart. Prenez-en la racine, à savoir dix et demi. Retranchez-en un demi.

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Et (pour additionner les nombres) pairs suivant l'ordre naturel (la méthode consiste) à ajouter au dernier (nombre) 2, et à multiplier la moitié du résultat par la moitié du même dernier (nombre). Comme (si l'on veut additionner) depuis 2 jusqu'à 8, ce dont le résultat est 20. Et (pour additionner les nombres pairs, en les élevant au carré (la méthode consiste) à les additionner suivant l'ordre, à ajouter ensuite aux deux tiers du dernier (nombre) constamment deux tiers de l'unité. et à multiplier le résultat par ce qui provenait de l'addition (des nombres pairs simples); ou à former le rectangle des deux nombres qui viennent suivant l'ordre après le dernier (nombre pair) et à multiplier le résultat par un sixième du dernier (nombre). Et si l'on dit: (le nombre) cent dix, combien contient-il de nombres pairs, alors ajoutez-y constamment un quart de l'unité, et retranchez de la racine du résultat constamment la moitié d'une unité; le double (*a*) du reste sera la réponse.

(**) Le mots « le double de » sont de trop; il faut dire: ce qui reste sera le nombre des nombres pairs contenus dans le nombre proposé.

(*a*) Les mots « double du » sont de trop; il faut dire: le reste sera la réponse. Car, puisque $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$, si l'on pose $n(n+1) = a$, on aura

$$\sqrt{a + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} = \sqrt{n^2 + n + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} = \sqrt{(n + \tfrac{1}{2})^2} - \tfrac{1}{2} = (n + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} = n.$$

Il reste dix. Le double de cela sera vingt, et tel est le nombre des (nombres) pairs contenus dans cent dix (*).

La seconde manière (de sommer les carrés des nombres pairs suivant l'ordre, consiste) à former le rectangle des deux nombres qui avoisinent le dix par après, à savoir du onze et du douze. Donc multipliez-en l'un par l'autre, et réservez le résultat. C'est cent trente deux. Ensuite prenez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir du dix. Vous trouvez que c'est un et deux tiers. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par le cent trente deux. Le résultat sera deux cent vingt, ce qui est la réponse, comme précédemment.

Et si l'on dit: (**) additionnez depuis deux jusqu'à dix suivant l'ordre des pairs f. 8 v. lig. 16.
en les élevant au cube, alors la méthode pour cela consiste à additionner les nombres pairs suivant l'ordre, ainsi qu'il précède, et à réserver le résultat, à savoir trente. Ensuite doublez-le. Ce sera soixante. Multipliez cela par le (nombre) réservé, à savoir par trente. Le résultat sera mille huit cent, et telle est la réponse. f. 8 v. lig. 19.

Et si l'on dit: additionnez ce qui est contenu dans dix cases suivant l'ordre des nombres pairs, ce qui signifie que dans la première case se trouve deux, dans la seconde quatre, et ainsi de suite, suivant l'ordre des nombres pairs, jusqu'à la dixième case; alors la méthode pour cela consiste à multiplier le nombre des cases, à savoir dix, par lui-même augmenté d'une unité. Ce sera cent dix; et telle est la réponse.

Ceci (est l'opération) si le commencement des nombres pairs est le deux. Mais si le commencement est un nombre pair différent du deux; alors faites-en l'addition en supposant (d'abord) quo le commencement soit deux, et réservez ce qui en résulte. Ensuite additionnez ce qui est compris entre le deux et le nombre donné comme premier. Retranchez cela du nombre réservé. Ce qui reste est la réponse.

Sachez aussi que, si le commencement est fait à partir d'un nombre différent

(*) On a $110 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$ ce qui sont dix et *non vingt* nombres pairs. Je viens déjà d'indiquer la source de cette erreur du texte arabe.

(**) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

L'addition suivant l'ordre des (nombres) pairs en les élevant au cube, consiste à additionner les (nombres) pairs suivant l'ordre, à doubler le résultat, et à multiplier le résultat par le (nombre qu'on avait) doublé. Et si l'on dit: additionnez ce qui se trouve dans 10 cases suivant l'ordre des (nombres) pairs à partir de 2, alors l'opération consiste à multiplier le nombre des cases par lui-même augmenté de l'unité. Le résultat sera la réponse. Ceci a lieu si (la suite) commence par 2. Si non, faites la somme (comme d'habitude) en supposant que le commencement soit 2, et réservez le résultat; retranchez-en la somme de ce qui se trouve entre le deux et le nombre donné comme premier. Le reste sera la réponse. Et si dans ces trois divisions (de l'addition) (a) le commencement ne se fait pas par l'unité, alors additionnez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite depuis l'unité jusqu'au (nombre) qui précède le (nombre donné comme) commencement (de la suite), et retranchez le plus petit du plus grand. Dans l'addition des (nombres) pairs le deux tient la place que tient l'unité dans l'addition des autres.

(a) Les trois divisions dont il s'agit sont: la sommation des nombres naturels, des nombres impairs et des nombres pairs.

f. 9 r. de l'unité dans une autre de ces | trois divisions (*), vous additionnerez (d'abord) depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, vous additionnerez ensuite depuis l'unité jusqu'au nombre qui précède celui qui est le commencement (donné), et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, dans l'addition des nombres pairs, la place que l'unité tient dans l'addition des autres (nombres). Comprenez cela.

TROISIÈME CHAPITRE

DE LA SOUSTRACTION.

La soustraction est l'action de retrancher le plus petit du plus grand de deux nombres, etc.

. . . . Et si l'on dit: on ajoute à une quantité son tiers et un dirhem, de la somme on retranche ensuite son tiers, et il reste un dirhem; combien est la quantité ? (**) Alors la réponse est que la quantité est trois huitièmes d'un dirhem. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers, et dont le f. 74 r. tiers ait lui-même un tiers. Tel est neuf. Vous y ajouterez donc | son tiers et un dirhem, ce qui fait trois parties et un dirhem, et ce sera douze parties et un dirhem. De cela vous retrancherez son tiers, ce qui est quatre parties et un tiers d'un dirhem. Il reste huit parties et deux tiers d'un dirhem; et cela est égal au dirhem restant que nous avions donné. Vous poserez donc les huit parties, c'est à dire par-

(*) Ces trois divisions sont l'addition des nombres pairs, que l'auteur vient de traiter, et l'addition des nombres naturels et des nombres impairs exposées précédemment.

(**) L'équation proposée est:

$$x + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x + \frac{x}{3} + 1}{3} = 1.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser $x = 9y$, ce qui lui donne

$$9y + \frac{9y}{3} + 1 - \frac{9y + \frac{9y}{3} + 1}{3} = 1,$$

$$\text{ou} \quad 9y + 3y + 1 - \frac{9y + 3y + 1}{3} = 1,$$

$$\text{ou} \quad 12y + 1 - \frac{12y + 1}{3} = 1, \quad \text{ou} \quad 12y + 1 - 4y - \frac{1}{3} = 1,$$

$$\text{ou} \quad 8y + \frac{2}{3} = 1, \text{ ou } 8y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; \text{ mais } y = \frac{1}{9}x,$$

$$\text{donc } \frac{8x}{9} = \frac{1}{3}, \quad \text{ou } 8x = \frac{9}{3} = 3, \quad \text{donc } x = \frac{3}{8}.$$

ties d'un dirhem, et vous les réserverez. Ensuite vous retrancherez les deux tiers d'un dirhem du dirhem. Il reste un tiers d'un dirhem. Vous multiplierez cela par le dénominateur, lequel est neuf. Ce sera trois. Vous diviserez cela par la partie, à savoir par huit. Il résultera trois huitièmes d'un dirhem, ce qui est la quantité (cherchée). (*)

Et si l'on dit : on ajoute à une quantité son cinquième et un dirhem, on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart (**), et il reste deux dirhems, combien est la quantité ? (***) Alors la réponse est que la quantité est trois dirhems et un sixième. La méthode pour cela consiste à prendre un dénominateur qui ait un tiers et un quart et un cinquième. Tel est soixante. Vous y ajouterez son cin-

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant aux mots du (texte): « trois huitièmes d'un dirhem etc., » la preuve de cela (consiste en ce) que vous ajoutez au trois son tiers, ce qui fait quatre huitièmes. A ceci vous ajoutez ensuite huit, en remplacement du dirhem: ce sera douze huitièmes. Après cela vous en retranchez son tiers, ce qui est quatre huitièmes. Il reste huit (huitièmes), ce qui est l'équivalent du dirhem, de sorte qu'il n'est rien resté (de trop). Et, si vous voulez, posez le dirhem égal à vingt quatre, en multipliant trois par huit. Trois huitièmes de cela sont neuf. Ajoutez-y son tiers, ce qui est trois. Il résulte douze huitièmes. Ensuite ajoutez à ceci le dirhem, sous la forme de vingt quatre. La somme sera trente six. Retranchez-en son tiers, c'est à dire douze. Il reste vingt quatre, ce qui est l'équivalent du dirhem. Et si on retranche cela, il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné (a).

(**) Le texte ms. ajoute ici encore « et deux dirhems; on retranche ensuite de la somme son tiers et son quart; » mais la suite prouve que c'est une méprise du copiste.

(***) L'équation proposée est:

$$x + \frac{x}{5} + 1 - \frac{x + \frac{x}{5} + 1}{3} - \frac{x + \frac{x}{5} + 1}{4} = 2.$$

La méthode de l'auteur consiste à poser $x = 60\,y$, ce qui lui donne

$$60y + \frac{60\,y}{5} + 1 - \frac{60y + \frac{60y}{5} + 1}{3} - \frac{60y + \frac{60y}{5} + 1}{4} = 2,$$

$$\text{ou} \quad 60y + 12\,y + 1 - \frac{60y + 12\,y + 1}{3} - \frac{60y + 12\,y + 1}{4} = 2,$$

$$\text{ou} \quad 72\,y + 1 - \left(42y + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 2,$$

$$\text{ou} \quad 30\,y + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 2, \quad \text{ou} \quad 30y = 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

$$\text{mais} \quad y = \frac{1}{60}x, \quad \text{donc} \ \frac{30x}{60} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

$$\text{ou} \quad 30\,x = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) 60 = 95, \quad \text{ou} \ \ x = \frac{95}{30} = 3\,\frac{1}{6}.$$

(a) A la fin d'une des gloses précédentes se trouve mentionné le nom de Hoçaïn Almahallî ; je crois que ce Hoçaïn Almahallî est identique au Hoçaïn Ben Mohammed Almahallî le châféite, qui est l'auteur du second des trois traités contenus dans le manuscrit d'où est tiré le morceau ici traduit. Voir ci-dessus, pag. 14, lig. 7 et 8.

quième et un dirhem. Il viendra soixante douze parties et un dirhem. Vous retrancherez de cela son tiers et son quart, à savoir quarante deux parties et un tiers et un quart d'un dirhem. Il reste trente parties et un quart et un sixième d'un dirhem. Cela est égal à deux dirhems.

Donc vous poserez les trente parties comme la partie réservée. Ensuite vous retrancherez le quart et le sixième des deux dirhems, parce que cela était ajouté aux parties. Il reste un dirhem et un tiers et un quart. Vous multiplierez cela par le dénominateur qui est soixante. Ce sera quatre-vingt quinze. Divisez cela par la partie, à savoir par trente. Il résulte trois dirhems et un sixième d'un dirhem (*), ce qui est la quantité (cherchée).

Ici nous nous arrêtons, et ce (qui précède) peut suffire à celui qui le médite. Dieu, qu'il soit loué et exalté, connaît mieux la vérité. Lui est le lieu où tout revient et où tout retourne. Louange à Dieu, maître de l'Univers. Il nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs. Fin.



(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Quant aux mots du (texte): « trois dirhems et un sixième etc. » la preuve de cela (consiste en ce) que vous convertissez cela en des sixièmes. Ce seront dix-neuf sixièmes. Ajoutez-y son cinquième, à savoir trois et quatre cinquièmes. Ensuite ajoutez à cela le dirhem, c'est à dire six. Il résultera vingt huit et quatre cinquièmes. Convertissez le tout en des cinquièmes. Il résulte cent quarante quatre. Retranchez-en le quart, ce qui est trente six, et le tiers, ce qui est quarante huit. La somme de cela est quatre-vingt quatre. Ajoutez-y deux dirhems, c'est à dire soixante (a). Il résulte comme somme cent quarante quatre. Donc (vous avez à retrancher une quantité) d'(une quantité) égale, (et) il ne reste rien. Fin de l'observation du (savant ci-dessus) mentionné. Puisse Dieu pardonner à nous et à lui. Amen !.

(a) La première conversion donne le dénominateur six, la seconde le dénominateur cinq, donc ensemble le dénominateur trente ; par conséquent deux dirhems, c'est à dire deux unités, s'ajoutent sous la forme de soixante trentièmes.

Manuscrit coté $^{951}_{3}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Voyez la description de ce manuscrit ci-dessus, pag. 14, lig. 3 à 12. — Les passages traduits ci-après appartiennent au traité d'arithmétique pratique d'Alkalaçâdi, intitulé: « Le soulèvement du vêtement de la science du calcul. Voyez ci-dessus, pag. 14, lig. 9 à 11. — Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 23 à 26 de la présente traduction se rapportent à la numération écrite au crayon sur les feuillets du manuscrit.)

Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed et ses compagnons. f. 123 v.

Le chaïkh, le philosophe exact, l'excellent, le docte, l'arithméticien, le savant connaisseur des opérations du partage des successions, celui qui réunit les qualités les plus diverses, le pénétrant, le précis, l'éminent, le célèbre, Aboû'l-haçan Alî Ben Mohammed Ben Mohammed Ben Alî (appelé) d'après son pays Alkalaçâdi, puisse Dieu lui être favorable et nous faire profiter de ses mérites, amen, dit:

Louange à Dieu qui est rapide dans son calcul, qui dirige les coeurs, qui est la cause des causes, le créateur des hommes, qui les a fait entrer dans le champ de l'existence en conséquence de sa volonté, et qui les a conduits par son prophète sur le chemin le plus parfait, dont la bonté et la générosité entourent tout ce qui existe, dont l'arrêt prédéterminé et la justice s'exercent à l'égard de toutes ses créatures, qu'il a formées dans des états successifs, et soumises à la nécessité de la destruction et de la mort, et du retour pour l'examen des secrets et des circonstances.

Grâces à Dieu pour les bienfaits nombreux dont il nous a gratifiés, et particulièrement pour ce qu'il nous a placés dans la plus noble espèce des hommes, distinguée par l'excellence de la langue et de l'éloquence.

Que la bénédiction et le salut (de Dieu) soient sur le seigneur des deux mondes, l'(apôtre) envoyé aux hommes et aux génies, le possesseur de la bannière et du nectar, celui en qui nous plaçons notre espoir au jour de la résurrection. (Que ce soit une) bénédiction qui se continue éternellement, tant que luira et brillera l'aurore.

Pour en venir au fait. Après que j'eus composé (l'ouvrage intitulé:) « Le moyen de fortifier la vue dans la science du calcul, » et qu'il ne m'était pas venu à l'esprit, pendant que j'en étais occupé, que rien dans cet ouvrage pût offrir de la difficulté au lecteur, (je m'aperçus) qu'il contenait des règles et des fondements des opérations exigés par l'art de la composition, et auxquels je fus amené par la nécessité de la rédaction, mais qui arrêtèrent, dans l'étude dudit ouvrage, les com-
f. 124 r. mençants pour lesquels il avait été composé. Cependant je ne pouvais plus changer l'ouvrage, parce qu'il s'était déjà répandu parmi les hommes, etc.

. . . . *Troisième section. De l'addition suivant le rapport.*

Quant à l'addition suivant le rapport naturel des nombres, l'opération pour cela consiste à ajouter une unité au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis un jusqu'à dix; alors ajoutez
f. 169 v. au dix un, ce sera onze. | Multipliez cela par le cinq qui est la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Il résulte cinquante cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus un tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres simples).

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors prenez deux tiers du dix plus un tiers de l'unité. Il en résulte comme somme sept. Multipliez cela par le cinquante cinq. Il résulte trois cent quatre-vingt cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

f. 169 v. lig. 5. L'élévation au cube de cette espèce (se fait) de nouveau par l'élévation au carré de la somme, c'est à dire du cinquante cinq dans notre exemple. Ce qui résulte (si l'on additionne) depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix, sera donc trois mille
f. 169 v. lig. 7. vingt cinq.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres pairs, l'opération pour cela consiste à ajouter deux au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et à multiplier la moitié de cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à douze suivant l'ordre des nombres pairs, alors ajoutez au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux. Ce sera quatorze, ce dont la moitié est sept. Multipliez cela par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Vous aurez pour résultat quarante deux, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication de deux tiers

du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par le résultat de l'addition (des nombres pairs simples).

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze; alors prenez deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend et deux tiers de l'unité. Ce sera huit et deux tiers. Multipliez cela par la somme, laquelle est quarante deux. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché qui est trois cent soixante quatre.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double. f. 169 v. lig. 15.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de deux jusqu'au cube de douze; alors multipliez la somme, à savoir quarante deux, par son double, à savoir par quatre-vingt quatre. Vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt huit. f. 169 v. lig. 18.

Quant à l'addition suivant l'ordre des nombres impairs, l'opération pour cela consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend une unité, et à élever au carré la moitié de la somme.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez au neuf une unité; ce sera dix. Élevez au carré la moitié de cela. Ce sera vingt cinq, et tel est le (nombre) cherché.

| L'élévation au carré de cette espèce (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui le suivent immédiatement. f. 170 r.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le résultat de la formation du rectangle compris sous le dix et le onze, ce qui est cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante cinq, ce qui est le (nombre) cherché.

L'élévation au cube de cette espèce (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres impairs simples) par son double moins un. f. 170 r. lig. 5.

Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors multipliez la somme, à savoir vingt cinq, par son double moins un, à savoir quarante neuf. Vous aurez pour résultat le (nombre) cherché, lequel est mille deux cent vingt cinq. f. 170 r. lig. 9.

Avertissement. Si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre inconnu (*); et le résultat étant tant, combien est le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend? Alors l'opération pour cela consiste à multiplier le résultat par le premier des cubes, à savoir huit, à ajouter au produit de la multiplication une unité, à prendre la racine de la somme, à ajouter ensuite à la ra-

(*) Il faut remarquer que l'auteur sous-entend ici, mais sans le dire, qu'il ne prend dans cette addition que les cubes des nombres *impairs* suivant l'ordre.

cine de nouveau une unité, à prendre la racine de la (somme), et à retrancher de ce qui est (la racine) l'unité. Vous aurez pour reste le (nombre) inconnu jusqu'auquel (la suite) s'étend (*).

Par exemple, si l'on vous dit : additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube d'un nombre inconnu, et le résultat sera quatre cent quatre-vingt seize. Alors multipliez ce résultat par huit, et ajoutez au produit une unité. La somme sera trois mille neuf cent soixante neuf. Prenez-en la racine. Ce sera soixante trois. Ajoutez-y une unité. Ce sera soixante quatre. Prenez-en la racine, à savoir huit. De ceci retranchez une unité. Vous aurez pour reste sept, ce qui est le (nombre) inconnu jus-
f. 170r. qu'auquel (la suite) s'étend.

lig. 19. Quant à l'addition à la manière des cases de l'échiquier, il faut nécessairement que deux conditions aient lieu. L'une, c'est que le commencement soit fait par l'unité; et la seconde, que le (rapport) suivant lequel (les nombres) se dépassent mutuellement, soit le double. Il suit de là que les nombres (qui se trouvent dans les
f. 170v. cases, sont tous) pairement pairs. | L'objet que l'on se propose est (de connaître) la quantité qui se trouvera dans la soixante quatrième case.

. . . . Vous aurez pour résultat deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le plus grand (des deux nombres amiables).

Ce nombre a en fait de parties: une moitié, un quart, un soixante-et-onzième, la moitié de cela, et la moitié de la moitié de cela; et la somme de ces parties
f. 172r. est | deux cent vingt, ce qui est le nombre excédant.

Celui-ci a en fait de parties: une moitié, un quart, un cinquième, un dixième, et la moitié du dixième; il a en outre, en fait de parties, un onzième, et la moitié et le quart (du onzième), et pareillement le cinquième de la même partie, et la moitié de cela à savoir le dixième (du onzième), et la moitié du dixième du (onzième). La somme de ces parties est deux cent quatre-vingt quatre, ce qui est le nombre déficient.

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cette composition. Louange à Dieu, maître de l'univers. Que la bénédiction de Dieu et la plénitude de son salut soient sur notre seigneur Mohammed, sur sa famille et ses compagnons.

L'achèvement (**) de la copie de ce livre eut lieu dans la nuit du mercredi,

(*) En effet l'auteur avait trouvé précédemment

$$1^3+3^3+5^3+\dots\dots+x^3=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left\{2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1\right\},$$

et si l'on pose le second membre de cette équation égal a k, on obtient

$$x=\sqrt{\sqrt{8k+1}+1}-1.$$

(**) Tandis que l'écriture de ce qui précède dans le manuscrit est fort régulière et lisible, elle de-

vingt trois nuits étant passées du mois de (chawwâl) (*), par la main de celui qui l'a écrit, l'esclave qui a besoin de son Maître le riche, l'esclave de Celui qui soit loué, le khâdjah (**) Chehr, le médecin; puisse Dieu lui pardonner, ainsi qu'à ses père et mère (***).

Louange à Dieu, Maître de l'univers. Fin.



vient ici brusquement très-négligée et difficile à déchiffrer. La traduction des lignes suivantes, qui terminent cette page du manuscrit, est donc en grande partie conjecturale.

(*) Le texte ms. a ici seulement un *lâm*, lettre finale du nom du mois de chawwâl. Comme les Arabes remplacent quelquefois un mot par sa lettre finale, par manière d'abréviation, et comme le mois de chawwâl est le seul dont le nom se termine par un *lâm*, je conjecture que c'est ce mois que le copiste a voulu indiquer. Ce qui me semble confirmer cette conjecture, c'est qu'on lit, à l'endroit indiqué dans la dernière note ci-après, la date de l'année 1143 (de l'hégire), et que le 24.e jour du mois de chawwâl de l'année 1143 de l'hégire, qui correspond au 2 mai 1731 de l'ère chrétienne, est précisément un mercredi.

(**) Khâdjah est un titre honorifique donné par les Orientaux aux personnes riches et respectables.

(***) Dans le prolongement de cette ligne, un peu vers la marge du manuscrit, on lit la date « année 1143 ».

Manuscrit coté $^{951}_{2}$ du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

Voyez la description de ce manuscrit ci dessus, pag. 5, lig. 13 à 15. — Les passages traduits ci après appartiennent au second des deux commentaires du *Talkhîs* d'Ibn Albannâ, contenus dans ce manuscrit. Voyez ci-dessus, pag. 5, lig. 12 et 13. — Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 28 à 32 de la présente traduction se rapportent à la seconde des deux numérations du manuscrit.)

---

f. 1 r. Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre seigneur Mohammed !

Ceci est (l'ouvrage intitulé) « Le rapprochement de celui qui est éloigné, sur Ibn Albannâ (*) ».

Louons Dieu d'une louange qui puisse être une expression complète et suffisante de la reconnaissance due pour l'abondance de ses bienfaits. Que la bénédiction et le salut de Dieu les plus parfaits soient sur notre seigneur Mohammed, le dernier et le plus accompli des prophètes et le prince des apôtres.

Pour en venir au fait. Je me suis rendu au desir des grands, des ingénieux, des nobles, des illustres, des perspicaces, des intelligents, relativement à la rédaction d'un abrégé de mon ouvrage qui a pour objet le Talkhis d'Ibn Albannâ. Et je me suis appliqué à suivre la trace de l'auteur dans cet objet, en tâchant d'atteindre son but, et en réalisant son intention et la signification du jugement qu'il a émis en disant: (**)

(*) Les mots « Ceci est » jusqu'à « Ibn Albannâ » sont d'une écriture différente de celle du reste de la page, et n'ont été ajoutés évidemment que plus tard. Le mot « sur » est probablement mis par erreur, au lieu de « de », ainsi qu'on le voit par le titre tel que le donne l'auteur du commentaire lui-même, ci-après, pag. 29, lig. 10 et 11.

(**) Je rappelle que ces vers sont à peu près les mêmes que ceux qui se trouvent cités au commencement du commentaire d'Alkalaçâdî, sans cependant être tout à fait identiques à ceux-ci. Voir ci-dessus, pag. 6.

Je me suis appliqué à être bref dans mon exposé,
Parce que je sais trouver la juste mesure dans la concision.
Je ne crains pas qu'on m'entende mal en prêtant à ce que je dis des sens différents de celui que j'ai voulu exprimer,
Mais je crains le blâme des grands hommes.
Or, la manière d'agir des savants distingués est la mienne,
Et le devoir de la science (*) est d'instruire les petits. (**)

Mais quelquefois j'ai laissé échapper le frein à cause de l'avantage d'un développement additionnel, et afin de rendre plus complète l'utilité (de mon ouvrage).

Je l'ai appelé « Le rapprochement de celui qui est éloigné des problèmes d'Ibn Albannâ. »

J'invoque le Seigneur en le priant d'en laisser profiter et moi, et vous, et tous ceux qui s'en occuperont, comme il nous a permis de profiter de (l'ouvrage qui sert de) base (à mon travail.) Il est le bienfaiteur, le généreux. Que sa bénédiction et son salut soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons.

L'auteur dit: *Le but* (***) *de cet ouvrage est de donner un exposé fait avec choix des opérations du calcul, de rendre prompte et facile l'intelligence de ses règles et de ses théories, et de présenter dans un ordre sévère les bases* et *le système de cet art.*

Commentaire. « Le but » est l'objet qu'on se propose. Le (mot qui signifie) « exposé fait avec choix » est un infinitif dont le sens est: l'action d'extraire la moelle d'une chose. « Les opérations du calcul », ce sont ses diverses applications, telles que l'addition, la multiplication, la division, l'abaissement (****), et les autres. « L'action de présenter dans un ordre sévère les bases », c'est | etc. fin de f. 1 r.

L'auteur dit : | *Et l'élévation au carré* (*****) *(se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, augmentés d'un tiers de l'unité, par la somme* (******). f. 8 r.

« L'élévation au carré » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même. Cependant l'auteur s'est éloigné de cette signification primitive dans la présente règle, soit pour abréger, soit pour plus de facilité à l'égard de celui qui exécute l'opéra-

(*) Une variante placée sur la marge du manuscrit porte « de la chamelle ».
(**) Ces vers paraissent être reproduits ici d'une manière plus correcte que dans le commentaire d'Alkalaçâdî. Le mètre dans lequel ces vers sont composés, s'appelle *Wâfir*.
(***) Les passages imprimés en italique sont la traduction des passages de l'ouvrage commenté.
(****) C'est l'opération décrite dans le septième chapitre de la deuxième partie de l'Arithmétique d'Alkalaçâdî. Voir *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, Anno XII (1859), Pag. 274.
(*****) C'est à dire: la sommation des carrés des nombres naturels suivant l'ordre.
(******) C'est à dire: la somme des nombres naturels simples.

tion. En disant « la somme », l'auteur se sert de l'article pour rappeler ce dont il a été fait mention précédemment; comme cela a lieu aussi dans cette parole du Koran: « Et Pharaon n'obéit point à l'envoyé. » Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit: additionnez depuis le carré de l'unité jusqu'au carré de dix, alors l'opération dans ce cas consiste à multiplier deux tiers du dix plus un tiers de l'unité, ce qui est sept, par la somme (des nombres) depuis un jusqu'à dix, qui est cinquante cinq. Vous aurez pour résultat trois cent quatre-vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

f. 8 r. lig. 9. L'auteur dit*: Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par l'élévation au carré de la somme.* « L'élévation au cube » signifie la multiplication d'un nombre par lui-même et du produit par sa racine; comme le huit et le vingt sept relativement au deux et au trois. L'article dans le mot « la somme », est de nouveau employé pour rappeler (ce qui précède). Donc si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de dix, alors élevez au carré la somme, à savoir cinquante cinq. Vous
f. 8 r. lig. 15. aurez pour résultat trois mille vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend joint à l'unité.* Ceci est la quatrième espèce de l'addition, et l'opération est claire d'après ce que l'auteur a dit. Par exemple, si l'on vous dit: additionnez depuis l'unité jusqu'à neuf, alors ajoutez un au neuf; ce sera dix. Élevez la moitié de cela, à savoir cinq, au carré. Vous aurez pour résultat vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Et l'élévation au carré* (*se fait*) *par la multiplication d'un sixième du* (*nombre*) *jusqu'auquel* (*la suite*) *s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* « La formation du rectangle » signifie la multiplication d'un nombre par un autre. L'auteur a dit « par après » par précaution, pour empêcher qu'on ne s'imagine (que les deux nombres sont ceux) qui précèdent le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Exemple de cette (règle). Si
f. 8 v. l'on vous dit: additionnez les impairs depuis le carré | de l'unité jusqu'au carré de neuf, alors multipliez un sixième du neuf, ce qui est un et demi, par le rectangle compris sous les deux nombres qui suivent le neuf, à savoir par cent dix. Vous aurez pour résultat cent soixante cinq, ce qui est la quantité cherchée.

f. 8 v. lig. 3. L'auteur dit: *Et l'élévation au cube* (*se fait*) *par la multiplication de la somme par son double moins un.* L'explication de cela (est contenue) dans notre exemple. Si l'on vous dit: additionnez depuis le cube de l'unité jusqu'au cube de neuf, alors vous savez que la somme (des impairs simples) est vingt cinq, et son double moins un, quarante neuf. Multipliez cela par le vingt cinq, vous aurez pour résultat mille
f. 8 v. lig. 8. deux cent vingt cinq, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.* Ceci est la cinquième espèce de l'addition, et la manière de faire l'opération est évidente, d'après ce que l'auteur a dit. Exemple de cette (règle). Si l'on vous dit: additionnez depuis deux jusqu'à douze, alors ajoutez au douze deux; ce sera quatorze. Multipliez la moitié de cela par la moitié du douze. Vous aurez pour résultat quarante deux, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples).* Ceci est une manière d'exécuter l'élévation au carré. Donc, si l'on vous dit : additionnez depuis le carré de deux jusqu'au carré de douze, alors multipliez deux tiers du douze plus deux tiers de l'unité, ce qui est huit et deux tiers, par la somme, laquelle est quarante deux Vous aurez pour résultat trois cent soixante quatre, ce qui est la quantité cherchée. La manière de faire la seconde multiplication (*) sera donnée, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le (chapitre des) fractions. Cependant j'ai pour cela une méthode abrégée qui consiste à multiplier le huit par le quarante deux. Vous aurez pour résultat trois cent trente six. Réservez cela. Ensuite multipliez | le deux qui se trouve au-dessus f. 9 r.
du trois (**) par le quarante deux. Vous aurez pour résultat quatre-vingt quatre. Divisez cela par le dénominateur, à savoir par le trois. Vous aurez pour résultat vingt huit. Ajoutez cela au (nombre) réservé. Vous aurez en somme de tout cela trois cent soixante quatre, ce qui est la quantité cherchée.

L'auteur dit: *ou multipliez un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.* Ceci est une seconde manière de l'élévation au carré des nombres pairs. Un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, est dans notre exemple deux, (et doit être) multiplié par cent quatre-vingt deux, ce qui est le résultat de la multiplication du treize par le quatorze. La quantité cherchée résultera conforme à ce qui précède.

L'auteur dit: *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme par son double.* Ceci est plus clair que (la règle) qui précède. Donc, si vous multipliez le quarante deux par son double, à savoir par quatre-vingt quatre, vous aurez pour résultat trois mille cinq cent vingt huit, ce qui est la quantité cherchée. f. 9 r. lig. 9. f. 9 r. lig. 13.

(*) A savoir la multiplication de la somme (quarante deux) par les deux tiers.

(**) Dans la fraction « deux tiers. »

TROISIÈME CHAPITRE

De la Soustraction.

La soustraction (*) *est la recherche de ce qui reste après qu'on a retranché l'un de deux nombres de l'autre.* Ceci est la soustraction par écrit. Et la définition plus exacte consiste à dire: La soustraction est la recherche de la différence entre deux nombres dont l'un est plus petit et l'autre plus grand.

L'auteur dit: *Elle (se fait) de deux manières*: Ceci est de nouveau une division et un classement de (ce qui est compris dans) la soustraction.

L'auteur dit: *Dans la première manière il faut poser (etc.)* Cette espèce est le genre de soustraction le plus facile; c'est le cas où, dans chaque rang du nombre que l'on retranche, il se trouve un (chiffre) plus petit que le (chiffre correspondant) dans chaque rang du (nombre) dont on retranche; et l'opération est évidente d'après ce que l'auteur a dit. En voici un exemple. Si l'on vous dit: retranchez cinq cent trente deux de neuf cent soixante quatorze, alors posez cela sur deux lignes de la même manière comme dans l'addition. C'est à dire que les unités du (nombre) retranché soient sous les unités du (nombre) dont on retranche, et pareillement les
fin de f. 9. r. dizaines, les centaines, et ce | qui vient après celles-ci, etc.

f. 58 v. L'opération, d'après | ce que l'auteur a dit, est évidente. Par exemple, si l'on vous dit: divisez vingt quatre carrés moins huit choses par quatre choses, alors posez cela ainsi: (**)

Q		C
24	moins	8
C		
4		

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique par le diviseur. Il résultera six choses. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par le « moins ». Il en résultera deux en nombre. Reliez cela par la particule « moins » aux choses. Le résultat de la division sera: six choses moins deux en nombre, ainsi:

C		N
6	moins	2

(*) On trouve ici sur la marge du ms. une glose dont voici la traduction:

Glose. Le plus convenable est de dire que la soustraction est l'action de retrancher un nombre plus petit d'un nombre plus grand, et son utilité consiste à faire connaître le reste. Alghazzî et d'autres ont soulevé des objections contre l'auteur au sujet de sa définition.

(**) Voir, pour la manière dont la notation de l'auteur arabe est reproduite, la note au bas de la page 420 du Vol. XII (année 1859) des *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. J'ajoute que dans le ms. sur lequel a été faite la présente traduction, le signe de la " chose „ a été réduit aux trois points de la lettre *chîn*, et que les nombres simples y sont aussi pourvus d'un signe superposé. Ce signe est le *dâl*, lettre initiale du mot *dirhem* dont les mathématiciens arabes se servent souvent dans le sens d'unité. Je rends ici ce *dâl* par un N (initiale du mot nombre).

Et si l'on vous dit: divisez quarante huit cubes moins dix-huit carrés, par trois choses, alors posez cela ainsi: (*)

K Q
48 moins 18

Ensuite divisez la quantité à laquelle le « moins » s'applique. Vous aurez pour résultat seize carrés. Réservez cela. Après cela divisez la quantité qui est régie par le « moins ». Il en résultera six choses. Reliez cela par la particule « moins » aux carrés. Le résultat sera seize carrés moins six choses, ainsi:

Q C
16 moins 6

Conformez-vous (pour d'autres cas semblables) au sens de cette (règle).

L'auteur dit: *Une espèce inférieure ne peut pas se diviser par une espèce supérieure*, c'est à dire à cause de l'impossibilité d'assigner (un résultat). Comme, par exemple, si l'on vous dit: quatre en nombre (divisé) par deux choses, ou neuf cubes (**) (divisés) par trois carrés.

L'auteur dit: *Et l'on ne divise pas non plus par une expression qui renferme un « moins »*. C'est à dire : et pareillement on ne divise pas par une expression qui renferme un « moins » à cause de l'impossibilité qui a lieu en ce (cas).

Ceci est la fin de ce que nous nous sommes proposé dans cet objet. Et nous prions notre Seigneur qu'il rende cela profitable, comme il a rendu profitable (l'ouvrage qui a servi de) base au (présent travail). Il est bienfaisant et généreux. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons; que le salut de Dieu soit répandu sur eux avec profusion. Louange à Dieu, maître de l'univers.

Ceci fut écrit par le pauvre qui a besoin de son Seigneur le riche, Abdallah Soûlât Almozâtî, pour son propre usage, et pour l'usage de qui il plaira à Dieu, après lui. Cette copie fut faite sur un exemplaire difficile à lire.

(*) Je pense que c'est par un oubli du copiste que le ms. omet de poser aussi les « trois choses », en notation, au dessous des « quarante huit cubes moins dix huit carrés » figurés en notations.

(**) Le mot « cubes » paraît être une erreur du copiste, au lieu de « choses ».

Manuscrit coté 952 du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris.

(Volume in 4° de 115 feuillets en papier dont les quatre premiers et les trois derniers sont des feuillets de garde non numérotés, tandis que les 108 autres feuillets sont numérotés avec les nombres 1 à 108, écrits à l'encre au moyen des chiffres indiens des Arabes orientaux, et, en outre (sauf le premier feuillet) avec les mêmes nombres écrits à l'encre au moyen des chiffres européens modernes.

Je pense que l'on peut attribuer à ces feuillets numérotés, à en juger d'après la teinte du papier et de l'encre, un âge de cinq à six cents ans, en exceptant les feuillets numérotés 9, 88 et 98 à 108, qui ont évidemment été ajoutés plus tard pour remplacer d'anciens feuillets perdus. La copie paraît avoir été faite en Égypte d'où le manuscrit a été apporté en France par M. Delaporte, lors de l'expédition d'Egypte.

Les 108 feuillets numérotés contiennent le texte d'un traité d'algèbre, composé par Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, et dédié au vizir Fakhr Almoulq qui mourut le 3 Septembre 1016 de notre ère.

Une analyse très-étendue de ce traité d'algèbre a été donnée dans l'ouvrage intitulé : *Extrait du Fakhrî*, par F. Woepcke. Paris, 1853.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 34 et suivantes de la présente traduction se rapportent à la numération écrite à l'encre.)

---

f. 1 v. Au nom de Dieu clément et miséricordieux !

Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alqarkhî, le calculateur, que Dieu le Très-Haut soit, miséricordieux envers lui, dit:

J'ai trouvé que le calcul a pour objet la détermination des inconnues au moyen des connues dans toutes ses espèces, et j'ai observé que la plus claire des règles, et le plus évident des moyens pour cet effet est l'art de l'algèbre, à cause de sa puissance et de l'universalité avec laquelle il s'étend sur tous les problèmes du calcul, suivant leur diversité.

J'ai vu que les ouvrages composés sur cet art ne contenaient pas (complétement) ce dont on a besoin en fait de la connaissance de ses éléments; qu'ils étaient insuffisants par rapport aux théories sur lesquelles on s'appuie dans l'étude de ses branches spéciales; et que leurs auteurs avaient négligé d'expliquer les théorèmes de cet art qui sont le chemin du plus haut degré (de savoir algébrique) et le moyen de parvenir à la perfection.

Ensuite j'ai fait dans cet art de belles découvertes, dont je n'ai vu chez aucun d'eux une mention, et j'ai éclairci des difficultés dont je n'ai trouvé dans leurs ouvrages ni l'exposé, ni l'explication.

Or, après avoir acquis cet avantage, et après avoir éprouvé le besoin de suppléer à ce defaut, je ne pus pas m'empêcher de composer un ouvrage contenant et renfermant ces (perfectionnements), et dans lequel je donnasse une explication faite

avec choix des éléments de (l'algèbre), exempte de l'impureté de la redondance et de la souillure de la verbosité.

Mais je fus éloigné de l'exécution de) ce (projet) par les obstacles qu'y opposaient la corruption du temps, les calamités de périodes remplies de désastres et l'état général de crainte, de violence et d'oppression où se trouvaient les hommes, jusqu'à ce que Dieu, qu'il soit béni et exalté, les secourût par notre maître, le vizir, le seigneur illustre, le parfait dans le gouvernement, le vizir des vizirs, revêtu des deux autorités, Aboû Ghâlib, (*) l'affranchi du commandeur des croyants, dont Dieu prolonge l'existence! Dieu rendit les hommes heureux par l'excellence de son administration, et leur accorda, pendant la durée bienheureuse de ses jours, au plus haut degré tout ce qu'ils désiraient en fait de justice, de sécurité, d'abondance et de bien. Il arracha le monde, par son gouvernement, au vice et aux hommes vicieux, et le rendit resplendissant par la sérénité de son regard, et par la manière dont il fit revivre les traces effacées de la science. Dieu fit de lui un modèle de toutes les vertus, de sorte qu'on est guidé par sa direction et qu'on demande à être éclairé | par f. 2 r.
sa lumière.

. . . Nous faisons cela en vertu de ce que j'ai expliqué. Car, si vous multipliez un nombre quelconque par le nombre suivant, et si vous multipliez ensuite l'un de deux autres nombres se trouvant de part et d'autre des deux (premiers) par celui qui lui correspond, le premier résultat dépasse le second de la quantité du produit de la différence entre l'un des deux extrêmes et l'un des deux moyens | par la dif- f. 22 v.
férence entre le même extrême et l'autre moyen. (**) Comprenez cela.

Si l'on vous dit: prenez depuis l'unité jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque nombre par le suivant, un par deux, deux par trois, trois par quatre, et ainsi de suite; alors prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante cinq. Prenez deux tiers du dix moins deux tiers d'un dirhem, et multipliez cela par cinquante cinq. Ce sera trois cent trente. (***)

Si l'on dit: combien (obtenez vous en allant) depuis l'unité jusqu'à dix, à la con- f. 22 v.
dition d'élever chacun des nombres au cube et d'additionner les résultats; alors pre- lig. 5.
nez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante

(*) On lit dans les *Vies des hommes illustres* d'Jbn Khallican: Aboû Ghâlib Mohammed Ben Khalaf, surnommé Fakhr Almoulq, vizir de Behâ Aldaoulah fils d'Adhad Aldaoûlah Jbn'Bouwaïh . . . . C'est pour lui que Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan, le calculateur, Alqarkhî, composa le livre (intitulé) Alfakhrî sur l'algèbre, et le livre (intitulé) Le (traité) suffisant sur le calcul. (Comparez la traduction anglaise de M. de Slane, T. III., p. 283; et Abulfedae *Annales muslemici*, ed. Reiske et Adler, T. III, p. 6 et 7.)

(**) C'est à dire $\{(a+1)+n\}.(a-n)=(a+1)a-n(n+1)$.

(***) $1.2+2.3+3.4+\ldots+9.10=(1+2+3+\ldots+10)(\frac{2}{3}.10-\frac{2}{3})=55(\frac{2}{3}.10-\frac{2}{3})$
$= 330.$

cinq. Multipliez cela par lui-même. Ce sera trois mille vingt cinq, et telle est la réponse. (*)

Démonstration numérique de ce (théorème). Il a été dit déjà précédemment que, si vous divisez un nombre quelconque en deux parties, si l'on multiplie (ensuite) chacune des deux parties par elle-même, et si l'on multiplie l'une des deux parties par l'autre (prise) deux fois, cela (fait ensemble) le carré de ce nombre. (**)

Donc, si vous divisez cinquante cinq en deux parties, dix et quarante cinq, le produit du dix par lui-même, et le produit du dix par le quarante cinq (pris) deux fois, ce dont la somme est mille, ensemble avec quarante cinq (multiplié) par lui-même, est égal au produit de cinquante cinq par cinquante cinq. Si donc nous rejetons le mille, qui est le cube du dix, et qui provient de la multiplication de dix par dix et de dix par quarante cinq (pris) deux fois, de trois mille vingt cinq, il reste quarante cinq (multiplié) par lui-même égal à deux mille vingt cinq. (***)

Si maintenant vous divisez le (quarante cinq) en deux parties, neuf et trente six, alors neuf fois neuf et neuf (****) fois trente six (pris) deux fois est sept cent vingt neuf, ce qui est le cube du neuf. Donc, si vous rejetez cela de deux mille vingt cinq, il reste mille deux cent quatre-vingt seize, ce qui est égal au produit
f. 23 r. de trente six par | trente six. (*****)

Si vous divisez ensuite ce (dernier nombre) en deux parties, huit et vingt huit, le produit du huit par lui-même et par vingt huit (pris) deux fois est cinq cent douze, ce qui est le cube du huit. Et si vous rejetez cela du mille deux cent quatre-vingt seize (******), il reste sept cent quatre-vingt quatre, ce qui est (le résultat) de la multiplication de vingt huit par lui-même. (*******)

(En continuant) d'une manière semblable à ce procédé on retranche du (nombre trois mille vingt cinq successivement) le cube de chaque nombre jusqu'à l'unité, et là on s'arrête.

Cela montre que, si vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis l'unité jusqu'au nombre que vous voudrez, et si vous la multipliez ensuite par elle-même, (le produit) est égal aux cubes des nombres qui sont précisément les nombres additionnés.

(*) $1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3=(1+2+3+\ldots+10)^2=55^2=3025$

(**) $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$.

(***) $55^2=(10+45)^2=10^2+2.10.45+45^2=1000+45^2=10^3+45^2$.

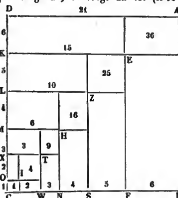
(****) Le texte manuscrit porte " quatre-vingt dix ,, au lieu de neuf, évidemment par suite d'une erreur de copiste.

(*****) $45^2=(9+36)^2=9^2+2.9.36+36^2=729+36^2=9^3+36^2$.

(******) Le manuscrit porte " quatre-vingt six ,, ce qui est évidemment une faute de copie.

(*******) $36^2=(8+28)^2=8^2+2.8.28+28^2=502+28^2=8^3+28^2$.

Démonstration de ce (théorème) au moyen de la figure. La surface ABCD est (le résultat) de la multiplication de vingt un par vingt un; et vingt un est (le résultat) de (la sommation des nombres naturels depuis) l'unité jusqu'à six. Nous disons donc que toute la surface ABCD est égale à l'ensemble des cubes des nombres dont l'addition produit vingt un, à savoir (des nombres) depuis un jusqu'à six.



Démonstration. Nous posons la ligne DK (égale à) [six, et la ligne KL égale à] (*) cinq, LM (égale à) quatre, MX (égale à) trois, XO (égale à) deux, et OC (égale à) un. De la même manière nous divisons la ligne BC, de sorte que BF égal à DK, FS égal à KL, SN égal à LM; et d'une manière analogue nous déterminons les autres parties.

Cela posé, nous disons que les surfaces DE, EA et EB sont (égales au) cube de six, parce que la surface EA est six fois six, tandis que la ligne KE est quinze, et la ligne EF pareillement, de sorte qu'il résulte des deux surfaces EB et ED cent quatre-vingt. Donc, si vous y ajoutez la surface EA, qui est trente six, ce sera deux cent seize, ce qui est le cube de six.

Il en est ainsi seulement, parce que, si d'un nombre quelconque vous retranchez l'unité, que vous multipliez le résultat par le carré du | premier nombre, et que vous ajoutez à cela le carré (de ce nombre), il résulte le cube (du même nombre) (**). Cela est évident. Et si vous prenez le nombre que vous voudrez (de nombres) à partir de l'unité, suivant l'ordre naturel, et que vous divisez ensuite la somme par le nombre qui suit le (dernier des nombres additionnés), il résulte la moitié du nombre jusqu'auquel vous avez pris (la somme) (***). Par exemple, vous prenez (la somme) depuis un jusqu'à huit, c'est trente six; vous divisez cela par neuf; il résulte quatre, ce qui est la moitié de huit. f. 23. v.

Donc, si vous prenez (la somme) jusqu'au nombre que vous voudrez, suivant l'ordre naturel, que vous multipliez ce qui en provient par le (nombre) qui suit (****)

(*) Les mots renfermés entre crochets manquent dans le manuscrit, évidemment par suite d'une omission du copiste.

(**) $(a-1)a^2+a^2=a^3$.

(***) $\frac{1+2+3+...+n}{n+1}=\frac{n}{2}$, ou $1+2+3+ ... + n=\frac{n}{2}(n+1)$.

(****) Le texte manuscrit porte " par la moitié de celui qui suit „ ce qui est erroné. C'est probablement une faute de copie.

(pris) deux fois, et que vous joignez à ce qui résulte de cette opération le carré du nombre suivant que je viens de mentionner, alors le résultat est le cube du nombre suivant (*).

Et conformément à cette explication, les surfaces KZ, ZE et ZF sont le cube de la ligne KL; les surfaces LH, HZ et HS le cube de la ligne LM; les surfaces MT, TH et TN égales au cube de MX; et les surfaces XI, IT et IW égales au cube de XO; (enfin) la surface IC est le cube de OC. Il est maintenant évident que la surface CA est égale aux cubes des nombres depuis un jusqu'à six; et voici la
f. 23 v. forme de la figure (**).
lig. 13.

Si l'on dit: combien (obtenez-vous en allant) depuis un jusqu'à dix, à la condition de multiplier chaque (nombre) impair par l'impair suivant, et chaque (nombre) pair par le pair suivant; alors la règle pour cela (est) que vous prenez (la somme des nombres naturels) depuis un jusqu'à dix, ce qui est cinquante cinq. Multipliez cela par deux tiers du dix moins un et deux tiers (quantité qui doit être re-
f. 24 r. tranchée) essentiellement et | invariablement. Ce sera deux cent soixante quinze. Ajoutez-y constamment une unité, ce qui fait deux cent soixante seize; et telle est la réponse (***).

La démonstration de ce (théorème) est évidente, parce que etc.

. . . . Après cela il faut que vous divisiez le seize par le deux, afin qu'il résulte le cube cherché. Or, vous avez déjà divisé le trente deux par deux, puis (encore) par deux, afin qu'il résulte le cube; et de cette manière vous l'avez divisé, comme si vous l'aviez divisé par le carré de deux.

Fin de l'ouvrage (intitulé) Le Fakhrî (****) qui comprend les éléments de l'algèbre et les éléments des problèmes.

Louanges sans bornes et sans fin à Celui qui donne l'intelligence. Que sa bénédiction soit sur notre seigneur, Mohammed, le prophète, et sur sa famille et ses compagnons, les purs, les saints.

Ceci fut écrit et achevé par Sâliq.

f. 108 v. | Dans un autre exemplaire (l'auteur) a dit: J'ai exclu de mon présent ouvrage ce qui ne s'y rapporte pas. J'avais désiré y ajouter quelque chose en fait des particularités des figures, du cercle, et des testaments. Mais je ne l'ai pas fait, pour deux raisons, dont l'une est (mon) aversion pour la prolixité; la seconde (est) que

(*) $2.(1+2+3+\ldots+n)(n+1)+(n+1)^2=n(n+1)^2+(n+1)^2=(n+1)^3$.

(**) Dans le manuscrit la figure est placée à la fin de la démonstration.

(***) $(1.3+3.5+\ldots\ldots+7.9)+(2.4+4.6+\ldots+8.10)$

$$=(1+2+3+\ldots+10)(\tfrac{2}{3}10-1\tfrac{2}{3})+1=276.$$

(****) Il y a lieu de croire que l'auteur avait donné ce titre à son ouvrage en honneur du vizir Aboû Ghâlib, surnommé *Fakhr* Almoulq (" La gloire du gouvernement ") auquel il avait dedié ce traité.

j'ai (dejà) composé sur chacun de ces (objets) un ouvrage étendu, embrassant ses éléments, leurs théories exactes, et la solution des problèmes les plus subtils avec leur méthode. Je prie Dieu, le Très-Haut, qu'il m'assiste dans l'accomplissement des devoirs de l'obéissance envers lui, et qu'il facilite à toutes ses créatures ce qui les délivre de l'erreur. Je se supplie de répandre sa bénédiction sur le prophète, Mohammed, son élu parmi ses créatures, et sur sa famille, les purs.

Fin de l'ouvrage, à savoir du (livre) connu sous (le nom) du Fakhrî.

Ceci fut écrit par Sâliq, le pauvre. Fin.









